幾何学II小テスト

担当: 中島 啓

2006 年 12 月 13 日 (水)

問題 1. (1) $\mathbf{R}^3$ から互いに交わらない k 本の直線 $(k \geq 0)$ を除いた空間 M_k のコホモロジー群 $H^q(M_k, \mathbf{R})$ を求めよ.

(2) M_k の閉部分多様体とコンパクトな部分多様体で, そのポアンカレ双対が, $H^q(M_k, \mathbf{R})$, $H^q_c(M_k, \mathbf{R})$ の基底になっているものの絵を描け. なぜ, 基底になっているのかの説明もつけること.

問題 2. $\mathbb{C}P^2$ を複素二次元射影空間とし, $[x : y : z]$ $(x, y, z \in \mathbb{C})$ を同次座標とする. $L = \{[x : y : 0] \mid (x, y) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ とする. L は複素一次元射影空間と微分同相な, $\mathbb{C}P^2$ 内の 2 次元閉部分多様体である. また, $L' = \{[x : 0 : z] \mid (x, z) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ を同様に考える. L, L' のポアンカレ双対を $\eta_L, \eta_{L'} \in H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbf{R})$ で表わす. ただし向きは, 非同次座標で入れる. このとき

(1) $\eta_L = \eta_{L'}$ を示せ.

(2) L と L' の交わりを調べることによって

$$\int_{\mathbb{C}P^2} \eta_L \wedge \eta_L$$

を求めよ.

コホモロジーの係数 ‘, $\mathbf{R}$’ は省略することにする.

解答 1. (1) k 番目の直線を L_k とし, 十分小さい $\varepsilon > 0$ を取り, L_k の管状近傍 $U_k = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \mathrm{dist}(x, L_k) < \varepsilon\}$ を取る. $M_k \cup U_k = M_{k-1}$, $M_k \cap U_k \cong \mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})$, $U_k \cong \mathbf{R} \times D^2$ である. ただし, $\cong$ は微分同相の意味で, $D^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < \varepsilon\}$ である.

Mayer-Vietoris 完全列により,

$$\begin{tikzcd}
H^3(M_{k-1}) \arrow[r] & H^3(M_k) \oplus H^3(\mathbf{R} \times D^2) \arrow[r] & H^3(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) \\
H^2(M_{k-1}) \arrow[r] & H^2(M_k) \oplus H^2(\mathbf{R} \times D^2) \arrow[r] & H^2(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) \arrow[llu, "d^*"'] \\
H^1(M_{k-1}) \arrow[r] & H^1(M_k) \oplus H^1(\mathbf{R} \times D^2) \arrow[r] & H^1(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) \arrow[llu, "d^*"'] \\
H^0(M_{k-1}) \arrow[r] & H^0(M_k) \oplus H^0(\mathbf{R} \times D^2) \arrow[r, "\varphi"'] & H^0(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) \arrow[llu, "d^*"']
\end{tikzcd}$$

となる. ここで, $H^q(\mathbf{R} \times D^2) = \mathbf{R}$ $(q = 0)$, $= 0$ $(q \neq 0)$ と, $H^q(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) = \mathbf{R}$ $(q = 0, 1)$, $= 0$ $(q \neq 0, 1)$ を代入する.

まず, $H^3(M_k) \cong H^3(M_{k-1})$ であるが, $H^3(M_0) = H^3(\mathbf{R}^3) \cong 0$ であるから, $H^3(M_k) \cong 0$ を得る.

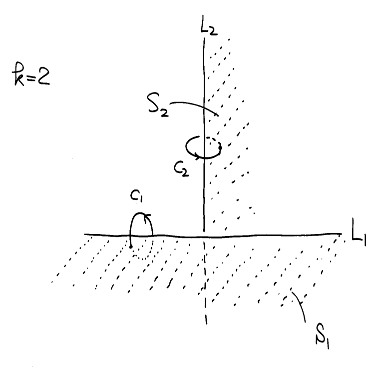
次に $H^2(M_{k-1})$ から $H^2(M_k)$ への全射が存在するが, $H^2(M_0) = 0$ であるから, 帰納的に $H^2(M_k) = 0$ が分かる.

また, M_k が連結であることは明らかであるから, $H^0(M_k) = \mathbf{R}$ であり, φ が全射であることも分かる. そうすると,

$$0 \to H^1(M_{k-1}) \to H^1(M_k) \to H^1(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) \to 0$$

という短完全列を得る. したがって帰納的に $H^1(M_k) \cong \mathbf{R}^k$ である.

(2) C_k を L_k の回りを一周する小さな円, S_k を L_k を境界に持つような半平面とし, 適当に調節して互いに交わらないようにしておく.



このとき, C_i, S_i のポアンカレ双対を, $\eta_{C_i} \in H^2_c(M_k)$, $\eta_{S_i} \in H^1(M_k)$ で表わす. $(1 \leq i \leq k)$ このとき $\eta_{S_i} \wedge \eta_{C_j}$ は, $S_i \cap C_j$ のポアンカレ双対であり, $S_i \cap C_j$ の向きは, S_i, C_j の向きと

M_k の向きから自然に決まる向きである. $S_i \cap C_j$ は $i \neq j$ のときは交わらない. $i = j$ のときは, S_i, C_j の向きを適当に入れておくと, 向きは $+1$ となり, したがって

$$\int_{M_k} \eta_{S_i} \wedge \eta_{C_j} = \delta_{ij}$$

となる. これにより, $\{\eta_{S_i}\}_{i=1}^k$ は一次独立であり, また $H^1(M_k)$ の次元の数だけあるので, これが基底であることも分かった. $H_c^2(M_k)$ の双対基底が $\{\eta_{C_i}\}_{i=1}^k$ である.

解答 2. (1) $F_t\colon \mathbf{C}P^2 \to \mathbf{C}P^2$ を $F_t([x:y:z]) = ([x : y\cos t - z\sin t : y\sin t + z\cos t]$ によって定義する. $F_0 = \mathrm{id}$ で, $F_{\pi/2}([x:y:z]) = [x:-z:y]$ である. $F_{\pi/2}$ は微分同相で $F_{\pi/2}(L) = L'$ であるから, $F_{\pi/2}^* \eta_{L'} = \eta_L$ が成り立つが, F_0 と, $F_{\pi/2}$ はホモトピックであるから, $F_{\pi/2}^* = \mathrm{id}$ であり, 結論が従う.

(2) L と L' は, 一点 $p = [1:0:0]$ で交わる. 非同次座標 $[x:y:z] \mapsto (y/x, z/x)$ を取り, さらに $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ によって, $\mathbf{R}^4$ に値をとる $[1:0:0]$ の回りの座標を取ると,

$$T_pL = \{(x_1, x_2, 0, 0) \in \mathbf{R}^4\}, \qquad T_pL' = \{(0, 0, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4\}$$

となり, 横断的に交わっており, また向きは正の向きで交わっている. 従って

$$\int_{\mathbb{C}P^2} \eta_L \wedge \eta_L = 1$$

が分かる.