幾何学II小テスト

担当: 中島 啓

2007年1月10日(水)

問題 1. X を位相空間とし, SX を $X \times [0,1]$ の $X \times \{0\}$ を一点につぶし, $X \times \{1\}$ を別の一点につぶしてできる位相空間とする. X の懸垂という. (例えば S^{n-1} の懸垂は S^n と同相である. このとき

$$H_q(SX; \mathbf{Z}) \cong \tilde{H}_{q-1}(X; \mathbf{Z})$$

が $q \geq 1$ に対して成り立つことを示せ. ただし, $\tilde{H}_{q-1}$ は簡約ホモロジーである.
(ヒント：SX を S^n のときのように二つに分けよ.)

問題 2. クラインの壷 (問題12(2) を参照. $S^1 \times [0,1]$ の両端を引っくり返して貼り合わせたもの) の整係数ホモロジー群を求めよ. ただし, mapping torus のホモロジー完全列の証明もつけること.

コホモロジーの係数 ‘, $\mathbf{Z}$’ は省略することにする.

解答 1. $SX = C_+X \cup C_-X$, $C_+X = X \times [0,1)$ の, $X \times \{0\}$ を一点につぶしたもの, $C_-X = X \times (0,1]$ の $X \times \{1\}$ を一点につぶしたものと分ける. $C_+X \cap C_-X = X \times (0,1)$ は, X とホモトピックである. また, $C_\pm X$ は, それぞれ端の点に縮めていけるので一点とホモトピックである. よって Mayer-Vietoris 完全列

$$\begin{tikzcd}
H_q(C_+X \cap C_-X) \arrow[r] & H_q(C_+X) \oplus H_q(C_-) \arrow[r] & H_q(SX) \arrow[dll] \\
H_{q-1}(C_+X \cap C_-X) \arrow[r] & H_{q-1}(C_+X) \oplus H_{q-1}(C_-X) \arrow[r] & H_{q-1}(SX)
\end{tikzcd}$$

において, $H_q(SX) \cong H_{q-1}(X)$ が, $q > 1$ のときに成り立つことが, ただちに分かる. この場合は簡約ホモロジー $\tilde{H}_{q-1}(X)$ は, $H_{q-1}(X)$ と同じである.

$q = 1$ のときは,

$$H_1(SX) \cong \mathrm{Ker}\,(H_0(X) \to \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z})$$

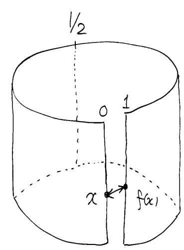
であるが, $\mathbf{Z}$ の二つの成分共に, 次数写像 deg であるので, Ker は簡約ホモロジー $\tilde{H}_0(X)$ に等しいことが分かった.

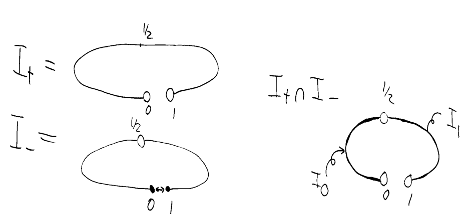
解答 2. 区間 $[0,1]$ を $I_+ = (0,1)$, $I_- = [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ と分け, 対応して $M = M_+ \cup M_-$ と分ける. $M_+ \ni [(x,t)] \mapsto (x,t) \in N \times I_+$ により, M_+ は $N \times I_+$ と同相であり, M_- は

$$M_- \ni [(x,t)] \mapsto \begin{cases} (x,t) & 0 \le t < \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ (f^{-1}(x), t-1) & \frac{1}{2} < t \le 1 \text{ のとき} \end{cases} \in N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

により, $N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ と同相である. ただし $[(x,0)] = [(f(x),1)]$ の行き先が, 上の場合でも下の場合でも $(x,0)$ となって well-defined であることに注意しよう. $N \times I_+$, $N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ は, 共に N にホモトピックである. しかし記号を区別するために前者を N_+, 後者を N_- で表わすことにする.

次に, $I_+ \cap I_1 = (0, \frac{1}{2}) \sqcup (\frac{1}{2}, 1)$ となるが, 最初の連結成分を I_0, 後者を I_1 で表わす. このとき $M_+ \cap M_-$ は, 同相 $M_+ \cong N \times I_+$ を通じて, $N \times I_0 \sqcup N \times I_1$ と同相である. $N \times I_0$, $N \times I_1$ は, 共に N とホモトピックである. しかし記号を区別するために前者を N_0, 後者を





N_1 で表わすことにする.

Mayer-Vietoris 完全列より

$$
\begin{tikzcd}
H_k(N_0) \oplus H_k(N_1) \arrow[r, "\varphi"] & H_k(N_+) \oplus H_k(N_-) \arrow[r] & H_k(M) \arrow[dll, "\partial_*"] \\
H_{k-1}(N_0) \oplus H_{k-1}(N_1) \arrow[r, "\varphi"'] & H_{k-1}(N_+) \oplus H_{k-1}(N_-) \arrow[r] & H_{k-1}(M)
\end{tikzcd}
$$

を得る. このとき φ を行列表示すると

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & f_* \end{pmatrix}$$

となる. (詳細略, 11/1 の小テストの解答における, π, s の代りに包含写像を用いる) よって

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{u \oplus v \in H_{k-1}(N_+) \oplus H_{k-1}(N_-) \mid u + v = 0, u + f_*(v) = 0\} \cong H_{k-1}(N)^{f^*},$$
$$\operatorname{Coker}\varphi = \frac{H_k(N_0) \oplus H_k(N_1)}{\{x \oplus y \in H_k(N_0) \oplus H_k(N_1) \mid x = u + v, y = u + f_*(v)\}} \cong \frac{H_k(N)}{\mathrm{Image}(\mathrm{id} - f_*)}$$

を得る. 従って

$$0 \to \frac{H_q(N)}{\mathrm{Image}(\mathrm{id} - f_*)} \to H_q(M) \to H_{q-1}(N)^{f_*} \to 0$$

を得る.

さて, $N = S^1$, $f(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$ として, $M = N \times [0,1]/\sim$ ($(x,0) \sim (f(x),1)$) として両端を貼り合わせたのがクラインの壷である. 上の完全列において, $H_q(N) = \mathbf{Z}$ $(q = 0,1) = 0$ (q その他) であって, f_* は, $q = 0$ のとき恒等写像で, $q = 1$ のときは -1 倍する写像である. (詳細略) したがって

$$H_{q-1}(N)^{f_*} = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 1 \text{ のとき}, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$
$$\frac{H_q(N)}{\mathrm{Image}(\mathrm{id} - f_*)} = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0 \text{ のとき}, \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & q = 1 \text{ のとき}, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

よって, $H_0(M) \cong \mathbf{Z}$, $H_q(M) \cong 0$ $(q > 1)$ は, ただちに分かる. $q = 1$ のときは,

$$0 \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to H_1(M) \to \mathbf{Z} \to 0$$

を得る. このとき, 一番右の $\mathbf{Z}$ の 1 に移るような $H_1(M)$ の元 x をとり, $\mathbf{Z} \to H_1(M)$ を $n \mapsto nx$ と定めると, 上の完全列の分裂を与え, (問題 33 参照)

$$H_1(M) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

を得る.