

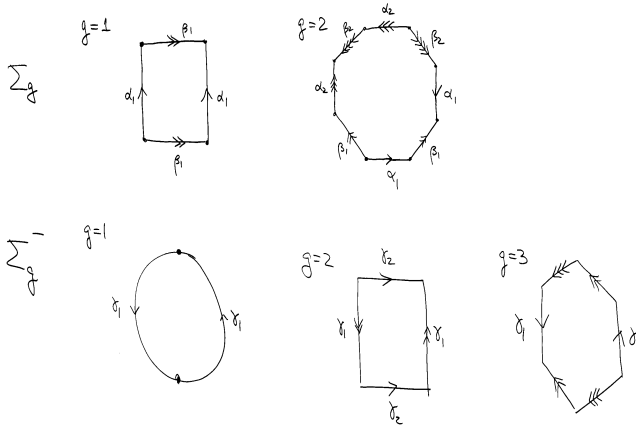
幾何学II 演習問題

担当: 中島 啓

2007年1月17日(水)

問題 37. (1) g 個の穴のあいた曲面 Σ_g (問題 13 参照) を, 下図のように $4g$ 角形の境界を貼り合わせて作る. (頂点はすべて一つに合わせる.) Σ_g に CW 複体としての構造を与え, ホモロジー群を計算せよ.

(2) $2g$ 角形の境界を図のように貼り合わせ, (向きづけのできない) 曲面 Σ_g^- を作る. Σ_1^- は, 二次元実射影空間 $P^2(\mathbf{R})$ であり, Σ_2^- はクラインの壺である. Σ_g^- の整係数ホモロジー群を求めよ.



問題 38. S^2 の一点 p を取る. $S^2 \times S^2$ の (p, x) と (x, p) をすべての $x \in S^2$ について同一視してできる商空間を X とする. X の整係数特異ホモロジー群を求めよ.

問題 39. 3次元球面を $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ とし, 巡回群 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ が S^3 に

$$(z_1, z_2) \mapsto \left(\exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right)z_1, \exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right)z_2 \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

によって作用するものとする. (群の作用とは, 群の元 g に対して写像 $\varphi_g: X \rightarrow X$ が定まって, $\varphi_{gh} = \varphi_g \varphi_h$, $\varphi_{g^{-1}} = (\varphi_g)^{-1}$ が成り立つものごとをいう. 今の場合, φ_g は同相写像になっている.) このとき, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の作用で移りあう点を同一視してできる商空間 $S^3/(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ をレンズ空間といい, L_n で表わす. その整係数特異ホモロジー群を求めよ.

略解 37. (1) e^2 を $4g$ 角形の内部, e^0 を頂点, $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ を図の通りにとって, CW 複体の構造を入れる. 図より $\partial\alpha_i = \partial\beta_i = 0$, $\partial e^2 = 0$ である. よって

$$H_q(\Sigma_g) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0, 2 \\ \mathbf{Z}^{\oplus 2g} & q = 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る.

(2) (1) と同様にして

$$H_q(\Sigma_g^-) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0 \\ \mathbf{Z}^{\oplus g-1} \oplus \mathbf{Z}/2 & q = 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る.

略解 38. S^2 の CW 複体の構造 $S^2 = e^0 \cup e^2$ を, $e^0 = p$ となるように取る. $S^2 \times S^2$ は, $e^0 \times e^0, e^0 \times e^2, e^2 \times e^0, e^2 \times e^2$ という CW 複体の構造を持つ. ($e^n \times e^m$ は e^{n+m} と同相である.) このとき $e^0 \times e^2$ と $e^2 \times e^0$ を貼り合わせて, 一枚の 2-セルにしたものが X の CW 複体の構造となる. したがって,

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0, 2, 4 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる.

略解 39. 射影 $\pi: S^3 \ni (z_1, z_2) \mapsto z_1 \in D = \{z_1 \in \mathbf{C} \mid |z_1| \leq 1\}$ を考える. $|z_1| \neq 1$ のとき, すなわち z_1 が D の境界にないときは, $\pi^{-1}(z_1)$ は S^1 で, 境界にあるときは, $z_2 = 0$ となって一点になる. また, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の作用が, D にも, $z_2 \mapsto \exp(\frac{2\pi ik}{n})z_2$ によって定義されて, $\pi\varphi_g(x) = \varphi_g\pi(x)$ が成り立つ. (このとき π は $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 同変であるという.) D を $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ で割った商空間は, 図の n 個に分けられた扇のうちの一つの両端を貼り合わせたものだが, D 自身に同相である. S^3 を 0, 1, 2, 3-セルがそれぞれ n 個ずつで, 群の作用でセルがセルに写されるように CW 複体の構造を入れる. (図参照) このとき $S^3 \rightarrow L_n$ によって, L_n に CW 複体の構造が入り, 3-セル e^3 , 2-セル e^2 , 1-セル e^1 , 0-セル e^0 ができる. このとき, $\partial e^3 = 0$, $\partial e^1 = 0$ は明らかである. e^2 の特性写像を境界に制限すると

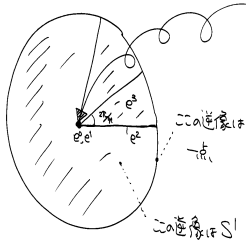
$$\varphi_2|_{\partial e^2}: S^1 \rightarrow \{(0, z_2) \in S^3\}/(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \cong S^1$$

を得るが, 定義域の方で一回回ると, 値域の方では n 回回っている. したがって $\partial e^2 = ne^1$ である. よって

$$H_q(L_n) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0, 3 \\ \mathbf{Z}/n & q = 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る.

D



$$\text{原点的逆像} = \{ (x, 0) \mid |x| = 1 \} \cong S^1$$

