# 幾何学 II 演習問題

担当: 中島 啓

2006 年 10 月 18 日 (水)

**問題 8.** $f,\ g\colon M \to N$ は固有な $C^\infty$ 級写像で, 固有写像としてホモトピック, すなわち $F\colon M\times\mathbf{R}\to N$ という $C^\infty$ 級写像で, $F|_{M\times\{t\}} = f$ $(t\le 0)$, $F|_{M\times\{t\}} = g$ $(t\ge 1)$ であり, さらに各 $F|_{M\times\{t\}}\colon M\to N$ が固有であるものが存在するとする. このときコンパクト台のコホモロジーに誘導される写像

$$f^*, g^*\colon H^p_c(N,\mathbf{R})\to H^p_c(M,\mathbf{R})$$

は等しいことを証明せよ.

**問題 9.** $X = \mathbf{R}^n$ とする. $H^n_c(X,\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ であった. $[\alpha]\in H^n_c(X,\mathbf{R})$ で, $\int_X \alpha = 1$ となるものを取っておく. 固有な写像 $f\colon X\to X$ に対し, コホモロジーに誘導される写像 $f^*\colon H^n_c(X,\mathbf{R})\to H^n_c(X,\mathbf{R})$ を考え, $f$ の写像度 $\deg f$ を $f^*[\alpha] = \deg f\times[\alpha]$ によって定義する. このとき

$$\deg f = \int_X f^*\alpha$$

が成り立つ.

(1) $f$ が全射でなければ, $\deg f = 0$ を証明せよ.

(2) $\deg f$ は整数であることを次の方針によって証明せよ.

- サード の定理により, ほとんどすべての $x\in X$ が $f$ の正常値である.
- $\alpha$ として, $x$ の小さな近傍のみの外では $0$ になっているものを取る.
- このとき, $f^{-1}(x) = \{x_1,\dots,x_n\}$ とすると, $f$ は, 各 $x_i$ の近傍 $U_i$ で微分同相である.
- $\int_{U_i} f^*\alpha = \pm 1$ である. ただし, $\pm$ は, $f|_{U_i}$ が向きを保つかど うかで決まっている.
- $\deg f = \sum_{i=1}^n \pm 1$

(3) **問題 3** のように多項式 $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ を $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の $C^\infty$ 級写像と考える.

- $f$ は固有写像であることを示せ.

- $f$ は $f_0(z) = z^n$ と固有写像としてホモトピックであることを示せ.
- $\deg f_0 = n$ を示せ.

よって, **問題 8** により, $\deg f = n$ であり, 特に $n \geq 1$ ならば $f$ は全射である.

**問題 10. (ホッホシルド・コホモロジー)** $A$ を, $\mathbf{C}$ 上の (可換とは限らない) 環とし, $M$ を $A$-双加群 (すなわち, 可換な左からと右からの $A$-加群の構造が入っている) とする. このとき

$$C^n(A, M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

とし, 微分 $d$ を

$$\begin{aligned} df(a_1, \ldots, a_{n+1}) =& a_1 f(a_2, \ldots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1} \end{aligned}$$

によって定義する. $d \circ d = 0$ を証明せよ. この複体のコホモロジーを**ホッホシルド・コホモロジー**という.

**略解 8.** $e_0 = e_0(t)dt$, $e_1 = e_1(t)dt$ を, それぞれ $t = -1$, $t = 2$ の十分近くだけで, 0 でなくて, $\int_{-\infty}^{\infty} e_\alpha(t)dt = 1$ $(\alpha = 0, 1)$ となるように取っておく. このとき $F$ の条件から

$$F^*\alpha \wedge e_0 = \pi^* f^* \alpha \wedge e_0, \qquad F^*\alpha \wedge e_1 = \pi^* g^* \alpha \wedge e_1$$

が $M \times \mathbb{R}$ 上の微分形式として成立する. また, $e_0$, $e_1$ の積分の値に関する仮定から, $e_0 - e_1 = d\beta$ となる**コンパクトな台をもつ** $\mathbf{R}$ 上の $C^\infty$ 級関数 $\beta = \beta(t)$ が存在する. このとき $\beta \wedge F^*\alpha$ は, $F|_{M\times\{t\}}$ が固有であることと, $\beta$ の台がコンパクトであることから, コンパクトな台をもつ. すると

$$d(\beta \wedge F^*\alpha) = d\beta \wedge F^*\alpha = (e_0 - e_1) \wedge F^*\alpha$$

であるから, $F^*\alpha \wedge e_0 = \pi^* f^* \alpha \wedge e_0$ と $F^*\alpha \wedge e_1 = \pi^* g^* \alpha \wedge e_1$ が $H_c^{p+1}(M \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ に定めるコホモロジー類は等しい. あとは $\pi_*\colon H_c^{p+1}(M \times \mathbf{R}, \mathbf{R}) \to H^p(M, \mathbf{R})$ を適用すると,

$$\pi_*\left(\pi^* f^* \alpha \wedge e_0\right) = f^*\alpha, \qquad \pi_*\left(\pi^* g^* \alpha \wedge e_1\right) = g^*\alpha$$

が (微分形式のレベルで) 成立することから結論が従う.

**略解 9.** (1) まず, $f$ が固有であることから, $f$ の像は閉集合である. (証明略) このとき, 写像度が微分形式 $\alpha$ の取り方によらないことに注意して, $f$ の像の補集合に台を持つように $\alpha$ を取る. そうすると, $f^*\alpha$ は微分形式として恒等的に 0 である. よって $\deg f$ の定義式によって, $\deg f = 0$ である.

(2) 方針の通りなので略.

(3)

- 固有写像であること

  いろいろなやり方があるが, たとえば立体射影を通じて, $f$ が $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ から $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ への連続写像に拡張されることを確かめればよい.

- $f_0(z) = z^n$ と固有写像としてホモトピックであること.

  $F(t, z) = z^n + f(t)(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)$ とおけばよい. ただし, $f(t)$ は, $t \leq 0$ では 0, $t \geq 1$ では 1 となる $\mathbf{R}$ 上の $C^\infty$ 関数である.

- $\deg f_0 = n$ であること.

  $f_0^{-1}(1) = \{e^{2\pi i d/n} \mid d = 0, 1, \ldots, n-1\}$ に注意し, 各 $e^{2\pi i d/n}$ の回りで, $f_0$ が向きを保っていることをチェックして, (2) から, $\deg f_0 = n$ を得る.

**略解 10.** 略