幾何学II小テスト

担当: 中島 啓

2006年11月2日 (水)

問題 1. 次の five lemma を証明せよ.
次のアーベル群の可換図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & {} \\
{} \arrow[r] & A' \arrow[r, "f_1'"'] & B' \arrow[r, "f_2'"'] & C' \arrow[r, "f_3'"'] & D' \arrow[r, "f_4'"'] & E' \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

横方向には完全であるとし, 縦方向には α, β, δ, ε は同型写像であるとする. このとき, γ も同型であることを証明せよ.

問題 2. f を C^∞ 級多様体 N から自分自身への微分同相写像とし, $N \times [0,1]$ に, $(x,0) \sim (f(x),1)$ で生成される同値関係を入れ, $M = N \times [0,1]/\sim$ と定義する. M は C^∞ 級多様体であり, mapping torus と呼ばれる.
(1) このとき

$$0 \to \frac{H^{k-1}(N,\mathbf{R})}{\mathrm{Image}(\mathrm{id} - f^*)} \to H^k(M,\mathbf{R}) \to H^k(N,\mathbf{R})^{f^*} \to 0$$

という完全系列を導け. ただし f^* は, f の誘導する準同型 $f^*\colon H^k(N,\mathbf{R}) \to H^k(N,\mathbf{R})$ であり, $H^{k-1}(N,\mathbf{R})^{f^*}$ は, f^* で固定される部分空間とする.
(2) $N = S^1$, $f(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$ として, 上の構成により, M を定義する. M は Klein の壷であることを示して, そのコホモロジーを求めよ.

注意. 問題 2 では, 配布した略解で省略されていた部分を詳しく説明すること. その部分にしか点は与えられない.

コホモロジーの係数 ‘, $\mathbf{R}$’ は省略することにする.

解答 1. 少し一般的に証明する.

(1) α が全射, β と δ が単射であるならば, γ は単射である.

$c \in \operatorname{Ker}\gamma$ とする.

1. $\delta f_3(c) = f_3'\gamma(c) = 0$ であり, δ は単射だから, $f_3(c) = 0$ である. C における完全性から $c = f_2(b)$ となるような $b \in B$ が存在する.
2. $f_2'\beta(b) = \gamma f_2(b) = \gamma(c) = 0$ である. B' における完全性から, $\beta(b) = f_1'(a')$ となるような $a' \in A'$ が存在する. α が全射だから, $\alpha(a) = a'$ となるような $a \in A$ が存在する.
3. $\beta f_1(a) = f_1'\alpha(a) = f_1'(a') = \beta(b)$ である. β の単射性により, $f_1(a) = b$ である.
4. $c = f_2(b) = f_2 f_1(a)$ であるが, 完全性 (正確には合成が 0 になることで十分) により, $c = 0$ である.

よって, γ が単射であることが示された.

(2) ε が単射, β と δ が全射であるならば, γ は全射である.

$c' \in C'$ とする.

1. $f_3'(c')$ を考えると, δ が全射であることから, $\delta(d) = f_3'(c')$ となる $d \in D$ が存在する.
2. $\varepsilon f_4(d) = f_4'\delta(d) = f_4' f_3'(c')$ で, これは 0 である. ε は単射であるから, $f_4(d) = 0$ である. D における完全性から $f_3(c) = d$ となる c が存在する.
3. $f_3'\gamma(c) = \delta f_3(c) = \delta(d) = f_3'(c')$ であるから, $f_3'(c' - \gamma(c)) = 0$ である. C' における完全性により, $c' - \gamma(c) = f_2'(b')$ となる $b' \in B'$ が存在する.
4. β が全射であるから, $b' = \beta(b)$ となる $b \in B$ が存在する. $\gamma f_2(b) = f_2'\beta(b) = f_2'(b') = c' - \gamma(c)$ である. したがって, $c' = \gamma(f_2(b) + c)$ となり, よって γ は全射である.

両方合わせて, 主張が証明された.

解答 2. (1)

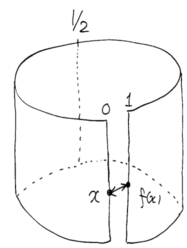
前回配布した略解は以下の通り:

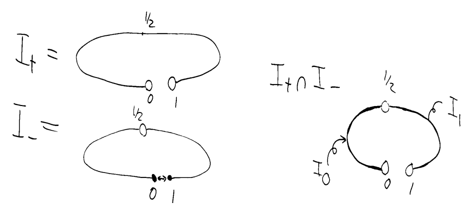
区間 $[0,1]$ を $I_+ = (0,1)$, $I_- = [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ と分け, 対応して $M = M_+ \cup M_-$ と分ける. $M_+ \ni [(x,t)] \mapsto (x,t) \in N \times I_+$ により, M_+ は $N \times I_+$ と微分同相であり, M_- は

$$M_- \ni [(x,t)] \mapsto \begin{cases} (x,t) & 0 \le t < \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ (f^{-1}(x), t-1) & \frac{1}{2} < t \le 1 \text{ のとき} \end{cases} \in N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

により, $N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ と微分同相である. ただし $[(x,0)] = [(f(x),1)]$ の行き先が, 上の場合でも下の場合でも $(x,0)$ となって well-defined であることに注意しよう. $N \times I_+$, $N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ は, 共に N にホモトピックである. しかし記号を区別するために前者を N_+, 後者を N_- で表わすことにする.

次に, $I_+ \cap I_- = (0, \frac{1}{2}) \sqcup (\frac{1}{2}, 1)$ となるが, 最初の連結成分を I_0, 後者を I_1 で表わす. このとき $M_+ \cap M_-$ は, 微分同相 $M_+ \cong N \times I_+$ を通じて, $N \times I_0 \sqcup N \times I_1$ と微分同相である. $N \times I_0$, $N \times I_1$ は, 共に N とホモトピックである. しかし記号を区別するために前者を N_0,





後者を N_1 で表わすことにする.

Mayer-Vietoris 完全列より

$$\begin{tikzcd}
H^k(M) \arrow[r] & H^k(N_+) \oplus H^k(N_-) \arrow[r, "\varphi"] & H^k(N_0) \oplus H^k(N_1) \\
H^{k-1}(M) \arrow[r] & H^{k-1}(N_+) \oplus H^{k-1}(N_-) \arrow[r, "\varphi"'] & H^{k-1}(N_0) \oplus H^{k-1}(N_1) \arrow[ull, "d^*"']
\end{tikzcd}$$

を得る. このとき φ を行列表示すると

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & f^* \end{pmatrix}$$

となる. (詳細略) よって

$$\mathrm{Ker}\, \varphi = \{u \oplus v \in H^k(N_+) \oplus H^k(N_-) \mid u + v = 0, u + f^*(v) = 0\} \cong H^k(N)^{f^*},$$

$$\mathrm{Coker}\, \varphi = \frac{H^k(N_0) \oplus H^k(N_1)}{\{x \oplus y \in H^k(N_0) \oplus H^k(N_1) \mid x = u + v, y = u + f^*(v)\}} \cong \frac{H^k(N)}{\mathrm{Image}(\mathrm{id} - f^*)}$$

を得る. 従って結論を得る.

——————————— 略解終わり ———————————

φ の計算を説明する. 略解の途中ででてきた微分同相 $M_+ \to N_+ \times I_+$, $M_- \to N_- \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を, それぞれ F_+, F_- で表わす.

φ を $M_\pm$ に戻って書き直すと,

$$\begin{CD}
H^k(M_+) \oplus H^k(M_-) @>{\Phi}>> H^k(M_+ \cap M_-) \\
@A{F_+^* \oplus F_-^*}A{\cong}A @A{\cong}A{\left(F_+|_{M_+ \cap M_-}\right)^*}A \\
H^k(N_+ \times I_+) \oplus H^k(N_- \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) @. H^k(N_0 \times (I_0 \sqcup I_1)) \\
@A{\pi_+^* \oplus \pi_-^*}A{\cong}A @V{\cong}V{s_0^* \oplus s_1^*}V \\
H^k(N_+) \oplus H^{k-1}(N_-) @>>{\varphi}> H^k(N_0) \oplus H^k(N_1)
\end{CD}$$

となる. 一番上の横矢印 Φ は

$$[\alpha_+] \oplus [\alpha_-] \mapsto \left[\alpha_-|_{M_+ \cap M_-} - \alpha_+|_{M_+ \cap M_-}\right]$$

であり, $\pi_+ \colon N_+ \times I_+ \to N_+$, $\pi_- \colon N_- \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to N_-$ は第一成分を取る写像であり, s_0, s_1 は, $N_0 \to N_0 \times (I_0 \sqcup I_1)$ で, それぞれ $x \mapsto (x, \frac{1}{4})$, $x \mapsto (x, \frac{3}{4})$ で与えられるものである. (Poincaré の補題にでてきた同型写像の定義を思いだそう.)

順番に計算していくと

$$\begin{aligned}
&\varphi([\beta_+] \oplus [\beta_-]) \\
&= (s_0^* \oplus s_1^*) \circ \left(\left(F_+|_{M_+ \cap M_-}\right)^{-1}\right)^* \circ \Phi \circ (F_+^* \oplus F_-^*) \circ (\pi_+^* \oplus \pi_-^*)([\beta_+] \oplus [\beta_-]) \\
&= (s_0^* \oplus s_1^*) \circ \left(\left(F_+|_{M_+ \cap M_-}\right)^{-1}\right)^* \circ \Phi[(\pi_+ \circ F_+)^* \beta_+] \oplus [(\pi_- \circ F_-)^* \beta_-] \\
&= (s_0^* \oplus s_1^*) \circ \left(\left(F_+|_{M_+ \cap M_-}\right)^{-1}\right)^* \left[(\pi_- \circ F_-)^* \beta_-|_{M_+ \cap M_-} - (\pi_+ \circ F_+)^* \beta_+|_{M_+ \cap M_-}\right] \\
&= (s_0^* \oplus s_1^*) \circ \left(\left(F_+|_{M_+ \cap M_-}\right)^{-1}\right)^* \left[(\pi_- \circ F_-|_{M_+ \cap M_-})^* \beta_- - (\pi_+ \circ F_+|_{M_+ \cap M_-})^* \beta_+\right] \\
&= \ \left[(\pi_- \circ F_-|_{M_+ \cap M_-} \circ \left(F_+|_{M_+ \cap M_-}\right)^{-1} \circ s_0)^* \beta_- - (\pi_+ \circ F_+|_{M_+ \cap M_-} \circ \left(F_+|_{M_+ \cap M_-}\right)^{-1} \circ s_0)^* \beta_+\right] \\
&\quad \oplus \left[(\pi_- \circ F_-|_{M_+ \cap M_-} \circ \left(F_+|_{M_+ \cap M_-}\right)^{-1} \circ s_1)^* \beta_- - (\pi_+ \circ F_+|_{M_+ \cap M_-} \circ \left(F_+|_{M_+ \cap M_-}\right)^{-1} \circ s_1)^* \beta_+\right]
\end{aligned}$$

となる. 合成写像を定義にしたがって計算してみると,

$$\pi_- \circ F_-|_{M_+ \cap M_-} \circ \left(F_+|_{M_+ \cap M_-}\right)^{-1} \circ s_1 = f^{-1}$$

で, その他のものは id である. したがって

$$\varphi([\beta_+] \oplus [\beta_-]) = ([\beta_-] - [\beta_+]) \oplus \left((f^{-1})^*[\beta_-] - [\beta_+]\right)$$

となる. このまま行列表示すれば,

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{id} & \mathrm{id} \\ -\mathrm{id} & (f^{-1})^* \end{pmatrix}$$

であるが, 適当に右左から行列を掛ければ, 上のものになる.

(2) 略