幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2006年11月8日(水)

問題 14. (1) S^1 を $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と見なす. 整数 n に対して, 写像 $f\colon S^1 \to S^1$ を $f(t) = nt$ で定義する. このとき f の写像度が n であることを, 積分を使って証明せよ. ただし写像度とは, $H^1(S^1, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$ に f^* が誘導する写像が, 何倍する写像かで定義される. もう少し詳しくいうと, $H^1(S^1, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$ の同型が, $[\alpha] \mapsto \int_{S^1} \alpha$ で与えられることに注意して, $f^*[\alpha]$ の積分を計算して証明する.

(2) $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ とし, $f\colon S^n \to S^n$ を, $f(x) = -x$ で定義する. このとき f の写像度を求めよ. **ヒント**. Stokes の定理を使って, $D^{n+1} = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| \le 1\}$ 上の $n+1$ 次微分形式から, S^n 上の n 次微分形式で積分が計算できるものを構成せよ.

(3) S^2 を $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ と思い, さらに一次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^1$ とみなす. 多項式写像 $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ が, $\tilde{f}([z_0 : z_1]) = [z_0^n : z_1^n + a_1 z_0 z_1^{n-1} + \cdots + a_n z_0^n]$ によって, $\mathbf{C}P^1$ の間の写像に拡張されることに注意する. $\tilde{f}$ の写像度が n であることを証明せよ. **ヒント**. 積分を用いて具体的に計算するのは面倒なので, **問題** 9 の方法を使え.

問題 15. コンパクト台の Mayer-Vietoris 完全列を用いて, メビウスの帯 M の $H_c^*(M, \mathbf{R})$ を計算せよ. ただしメビウスの帯とは, $[0,1] \times (-1,1)$ を, $(0,x) \sim (1,-x)$ から生成される同値関係で貼り合わせてできる多様体である. 一方, $H^*(M, \mathbf{R})$ は, M が S^1 とホモトピックであることから, $H^*(S^1, \mathbf{R})$ と同型になる. これから, メビウスの帯については, Poincaré 双対性が成立していないことをチェックせよ.

問題 16. X を $[0,2] \times (-1,1)$ を $(0,x) \sim (2,x)$ から生成される同値関係で貼り合わせてできる多様体とする. これは, $S^1 \times (-1,1)$ に他ならない. $f\colon X \to X$ を, $f(t,x) = ((t+1) \bmod 2, -x)$ で定義する. f は well-defined で, $f^2 = \mathrm{id}$ であり, これにより, X には, 群 $\{\pm\}$ が作用する. $X/\{\pm 1\}$ は, メビウスの帯 M である. 商写像を $\pi\colon X \to M$ とする. $H_c^*(M, \mathbf{R})$ は, π^* によって, $H_c^*(X, \mathbf{R})$ の群作用で不変な部分空間 $H_c^*(X, \mathbf{R})^{\pm 1}$ (群は f^* で作用する) であることをを証明し, これを用いて, $H_c^*(M, \mathbf{R})$ を計算せよ.

問題 17. n次元トーラス $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{ 個}}$ を $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ と思うことにする. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbf{R}^n$ の座標とする. $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ の整数成分の行列とする. $f_A\colon T^n \to T^n$ を $f_A(x \bmod \mathbf{Z}^n) = Ax \bmod \mathbf{Z}^n$ によって定義する. (well-defined であることに注意しよう.) このとき $H^*(T^n, \mathbf{R}) \cong \bigwedge^* \mathbf{R}^n$ と表わしたときに, $f_A^*\colon H^*(T^n, \mathbf{R}) \to H^*(T^n, \mathbf{R})$ を求めよ.

コホモロジーの係数 ‘, $\mathbf{R}$’ は省略することにする.

略解 14. (1) $\alpha = dt$ とおく. $\int_0^1 \alpha = 1$ である. $f^*(\alpha) = n\alpha$ より, $\int_0^1 f^*(\alpha) = n$ であり, 写像度は n である.

(2) $\alpha = x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$ とおく. $d\alpha = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$ であり, Stokes の定理により, $0 \neq \int_{D^{n+1}} d\alpha = \int_{S^n} \alpha$ である. このとき $f^*(d\alpha) = f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}) = (-1)^{n+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$ であるから, 再び Stokes の定理を用いて $\int_{S^n} f^*(\alpha) = (-1)^{n+1} \int_{S^n} \alpha$ である. よって写像度は $(-1)^{n+1}$ である.

(3) $f_0(z) = z^n$ とおき, $\tilde{f}_0$ を $\mathbf{C}P^1$ への拡張とすると, **問題** 9 と同じやり方で, $\tilde{f}$ と $\tilde{f}_0$ はホモトピックである. (この場合は, 固有写像であることをチェックする必要がなくなるので, より簡単である.) したがって写像度は等しい. $\tilde{f}_0$ については 1 の逆像を調べて, **問題** 9 と同様にして, 写像度が n であることが分かる. (詳細略)

略解 15. **問題** 12 のように, $[0,1] = I_+ \cup I_-$ と分け, $M = M_+ \cup M_-$ と分ける. $M_+ \cap M_- = M_0 \sqcup M_1$ と二つの連結成分に分かれる. コンパクト台の Mayer-Vietories 完全列により,

$$\begin{tikzcd}
H^k(M) & H^k(M_+) \oplus H^k(M_-) \arrow[l] & H^k(M_0) \oplus H^k(M_1) \arrow[l, "\varphi"'] \\
H^{k-1}(M) \arrow[urr, "d_*"] & H^{k-1}(M_+) \oplus H^{k-1}(M_-) \arrow[l] & H^{k-1}(M_0) \oplus H^{k-1}(M_1) \arrow[l, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

を得る. ここで, $M_\pm$, M_0, M_1 はすべて $\mathbf{R}^2$ と微分同相であることに注意し, $H^k(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}$ $(k = 2$ のとき$)$, $= 0$ (それ以外のとき) であり, $H^2(\mathbf{R}^2) \cong \mathbf{R}$ は, 積分 $[\alpha] \mapsto \int_{\mathbf{R}^2} \alpha$ で与えられることを思い出しておく. そうすると $H^2(M_+) \oplus H^2(M_-) \xleftarrow{\varphi} H^2(M_0) \oplus H^2(M_1)$ として, $H^2(M) \cong \operatorname{Coker} \varphi$, $H^1(M) \cong \operatorname{Ker} \varphi$ となる. φ を行列表示すると, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ となる. (詳細略) したがって, $\operatorname{Coker} \varphi = 0$, $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ であり, $H_c^*(M) = 0$ となる.

略解 16. π の微分 $d\pi_x \colon T_x X \to T_{\pi(x)} M$ を考える. π が定義域を小さくすると微分同相になることから, $d\pi_x$ は同型写像である. また, $y \in M$ に対し, $\pi(x) = y$ となる x は丁度二個, x と $f(x)$ であることを注意する. (X は M の二重被覆であるということである.) このとき, $T_x X \xrightarrow[d\pi_x]{\cong} T_{\pi(x)} M \xleftarrow[d\pi_{f(x)}]{\cong} T_{f(x)} X$ の合成を考えると, これは df_x で与えられることが分かる.

主張 $H_c^*(M) \ni [\alpha] \mapsto \pi^*[\alpha] \in H_c^*(X)$ を考える. その値域は, $H_c^* c(X)^{\pm 1}$ であり, $H_c^*(M) \xrightarrow[\cong]{\pi^*} H_c^*(X)^{\pm 1}$ と同型写像を誘導する.

まず微分形式のレベルで, $A_c^k(M) \ni \alpha \mapsto \pi^* \alpha \in A_c^k(X)^{\pm 1}$ が同型写像であることを示す.

α を M 上の微分形式とする. $\pi^* \alpha$ は, X 上の微分形式である. さらに, $f^* \pi^* \alpha = (\pi \circ f)^* \alpha = \pi^* \alpha$ であるから, $\pi^* \alpha$ は, f^* で不変である. 逆に ω が f^* で不変であるとする. このとき, $T_y M \to \mathbf{R}$ を, $\pi^{-1}(y) = x$ を取って, 上の $(d\pi_x)^{-1}$ を通じて $T_{\pi(x)} M \xrightarrow[(d\pi_x)^{-1}]{\cong} T_x X \xrightarrow{\omega_x} \mathbf{R}$ によって定義する. 上の注意により, x を取っても, $f(x)$ を取っても, ω が f^* で不変であるこ

とから同じ値になる．さらに，$y=\pi(x)$ を動かしたときに，y について滑らかに依存することが，$y\mapsto x$ が定義域を小さく取り直せば微分同相であることから従う．

そこで，$H_c^*(M)\ni[\alpha]\mapsto\pi^*[\alpha]\in H_c^*(X)$ を考える．上の考察から，$\pi^*[\alpha]\in H_c^*(X)^{\pm1}$ である．このとき，$\pi^*\colon H_c^*(M)\to H_c^*(X)^{\pm1}$ が同型であることを示す．

まず単射であることをいう．$[\pi^*\alpha]=0$ であるとすると，$\pi^*\alpha=d\omega$ となる，$\omega\in H_c^*(N)$ が存在する．このとき，$\tilde\omega=\frac12(\omega+f^*\omega)$ とおくと，$f^*\tilde\omega=\tilde\omega$ であるから，上の議論により，$\tilde\omega$ は M 上の微分形式 β を定める．さらに $d\tilde\omega=\frac12 d\omega+f^*d\omega=\pi^*\alpha$ であるから，$d\beta=\alpha$ である．よって $[\alpha]=0$ であり，π^* は単射である．

次に全射であることをいう．$[\omega]\in H_c^*(X)$ が，$f^*[\omega]=[\omega]$ を満たすとする．$f^*\omega=\omega+d\tau$ となる $\tau\in H_c^*(X)$ が存在する．このとき，$d(f^*\tau)=f^*d\tau=\omega-f^*\omega=-d\tau$ に注意して，$f^*(\omega+\frac12 d\tau)=\omega+d\tau-\frac12 d\tau=\omega+\frac12 d\tau$ である．したがって，$\omega+\frac12 d\tau$ は，M 上の微分形式 α で，$\pi^*\alpha=\omega+\frac12 d\tau$ となるものを定める．$[\omega]=[\omega+\frac12 d\tau]$ であるから，これは全射であることを示している．

さて，$H_c^k(X)\xleftarrow[e_*]{\cong}H_c^{k-1}(S^1)=\mathbf{R}$ $(k=1,2)$，$=0$ (それ以外) である．ただし，$e_*[\alpha]=[p^*\alpha\wedge e]$ ($p\colon X\cong S^1\times(-1,1)\to S^1$，$e$ は $(-1,1)$ 上のコンパクト台を持ち積分が 1 の 1 次微分形式) である．このとき，$f^*e=-e$ である．(何故か？) よって $f^*(p^*\alpha\wedge e)=-(p\circ f)^*\alpha\wedge e$ である．ところが，$p\circ f(t,x)=(t+1)\bmod 2$ は，p とホモトピックである．(何故か？) したがって，$[(p\circ f)^*\alpha]=[p^*\alpha]$ であり，よって，$f^*[p^*\alpha\wedge e]=-[p^*\alpha\wedge e]$ である．そうすると，不変部分空間 $H_c^*(X)^{\pm1}$ は 0 しか含まない．

略解 17. T^n の i 番目の S^1 は，x_i を 0 から 1 まで動かすと得られる．したがって，i 番目の S^1 の $H^1(S^1)$ の基底として $[dx_i]$ が得られる．(x_i は，T^n 上では well-defined ではないが，dx_i は well-defined であることに注意する.) よってテンソル積の i 番目の成分 $H^*(S^1)$ は，$\mathbf{R}\cdot1\oplus\mathbf{R}[dx_i]$ となる．Künneth の公式から $H^*(T^n)$ は，

$$[dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}]\qquad(i_1<\cdots<i_p)$$

を基底とする $\bigwedge^*\mathbf{R}^n$ と同型であった．このとき $A=(a_{ij})$ とすると，$\mathbf{R}^n$ では，$f_A^*(x_i)=x_i\circ f_A=\sum_j a_{ij}x_j$ である．よって，$f_A^*dx_i=\sum a_{ij}dx_j$ である．すなわち，$dx_1,\cdots,dx_n$ を基底と思うと，表現行列が A で与えられるものである．f_A^* は，$H^1(T^n)\cong\mathbf{R}^n$ 上では A に他ならない．

$H^k(T^n)$ の基底は，$[dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}]$ $(i_1<\cdots<i_k)$ であったことに注意すると，f_A^* は，$H^k(T^n)\cong\bigwedge^k\mathbf{R}$ 上では，A の $k\times k$ の小行列式でできる行列で与えられる．