幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2006年11月29日 (水)

問題 25. M 上のベクトル束の短完全列

$$0 \to S \to E \to Q \to 0$$

があったとする. (恒等写像を cover するバンドル写像 $S \to E$, $E \to Q$ があって, 各点 $x \in M$ ごとに, $0 \to S_x \to E_x \to Q_x \to 0$ は短完全列をなす.) さらに E_x $(x \in M)$ に内積 $(\ ,\ )_x$ を $x \in M$ について滑らかに依存するように入れておく. このとき, 各点 $x \in M$ ごとに S_x の E_x における直交補空間 $S_x^\perp$ を取って, $S^\perp = \bigcup_{x\in M} S_x^\perp$ を定義する. すると, $S^\perp$ は, M 上のベクトル束であって, Q と同型になることを証明せよ. E は, $S \oplus Q$ と同型になることを証明せよ.

問題 26. M を C^∞ 多様体とし, $\Delta\colon M \to M \times M$ を対角線埋め込み $x \mapsto (x, x)$ とする. $\Delta(M)$ の $M \times M$ における法束は, M の接束と同型であることを証明せよ.

$\pi\colon E \to M$ を向きのつけられたベクトル束とし, $\Phi(E)$ をそのトム類とする. 0-切断を $s\colon M \to E$ としたとき $s^*\Phi(E) \in H^n(M)$ を E の**オイラー類**といい, $e(E)$ で表わす.

問題 27. $\pi\colon E \to M$ をベクトル束とし, $s\colon M \to E$ をその切断とする. s が 0-切断 s_0 と**横断的に交わる**とは, $s(M)$ と $s_0(M)$ を共に E の部分多様体とみなしたときに横断的に交わっていることをいう.

(1) s が 0-切断と横断的に交わることは, 次と同値である: $x \in s^{-1}(0) = \{x \in M \mid s(x) = 0\}$ において, x の近傍 U における局所自明化 $\phi\colon E|_U \to U \times \mathbf{R}^n$ を取る. $\phi \circ s$ の第二成分を取ることにより, U 上で定義された $\mathbf{R}^n$-値関数 $\tilde{s}$ を考えるとき, x における微分 $d\tilde{s}_x\colon T_xM \to \mathbf{R}^n$ は全射である.

(2) s が 0-切断と横断的に交わるとき, $s^{-1}(0)$ は部分多様体であり, (M における) 法束 N は E の $s^{-1}(0)$ への制限と同型である.

(3) $s^*\Phi(E) = s_0^*\Phi(E)$ を示せ.

(4) M も E も向きづけられているものとする. $s^{-1}(0)$ のポアンカレ双対が E のオイラー類に等しいことを証明せよ.

問題 28. 複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ を $\mathbf{C}^{n+1}$ の中の一次元部分空間 ℓ の全体として定義する. このときトートロジカル直線束を

$$L = \{(\ell, z) \in \mathbf{C}P^n \times \mathbf{C}^{n+1} \mid z \in \ell\}$$

と定義する．(前回と同様.) L に適当に向きを入れ，さらにその双対束 L^* の切断をうまく取り，**問題** 25 を用いて，$n = 1$ のときに L^* のオイラー類 $e(L^*) \in H^2(\mathbf{C}P^1, \mathbf{R})$ の積分

$$\int_{\mathbf{C}P^1} e(L^*)$$

を計算せよ．

コホモロジーの係数 ‘, $\mathbf{R}$’ は省略することにする.

略解 25. S に, E の内積を制限して内積を定義する. S の局所的な枠で, 各点ごとに正規直交基底になるものを取り, さらにその枠に, $\operatorname{rank} E - \operatorname{rank} S$ 個の E の切断を付け加えて E の局所的な正規直交している枠を取る. このとき, この枠が座標ベクトルになるような局所自明化 $E|_U \cong U \times \mathbf{R}^n$ の下では, S は $U \times (\mathbf{R}^{\operatorname{rank} S} \oplus \{0\})$ となり, したがって, $S^\perp$ は $U \times (\{0\} \oplus \mathbf{R}^{n-\operatorname{rank} S})$ となる. このような枠を二つ取ったときに, その変換関数は, S を保っていることから $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ という形をしているが, 直交行列でなければいけないことから, さらに $\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$ という形でなければならないことが分かる. これを $\begin{bmatrix} g^S_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g^{S^\perp}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$ と書けば, $g^{S^\perp}_{\alpha\beta}$ が $S^\perp$ の変換関数となり, $S^\perp$ はベクトル束である. 一方, $g^S_{\alpha\beta}$ は S の変換関数であり, 上の変換関数の形から, $E = S \oplus S^\perp$ も分かる. また, $S^\perp \to E \to Q$ の合成によって, $S^\perp \cong Q$ も従う.

略解 26. $T(M \times M)$ の Δ による引き戻しは, $TM \oplus TM$ と同型である. そして, Δ の微分は,

$$TM \to TM \oplus TM; \qquad v \mapsto v \oplus v$$

を引き起こす. このとき,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & TM & \to & TM \oplus TM & \to & TM & \to & 0 \\ & & \uplus & & \uplus & & & & \\ & & v & \mapsto & v \oplus v & & & & \\ & & & & v \oplus w & \mapsto & v - w & & \end{array}$$

とおくと, ベクトル束の完全列を与えており, よって商束は TM と同型となる.

略解 27. (1) まず $s(M) \cap s_0(M)$ は, 自然に $s^{-1}(0)$ と同一視されることに注意しておく.

局所的に考えればよいので, $\phi\colon E|_U \to U \times \mathbf{R}^n$ を取って考えればよい. $s_0(M)$ を ϕ で写したものは $U \times \{0\}$ で, $s(M)$ を写したものはグラフ $\{(u, \tilde{s}(u)) \mid s \in U$ である. 接空間は, $T_{(x,0)}(U \times \mathbf{R}^n) = T_xU \oplus \mathbf{R}^n$ となる. $s_0(M)$, $s(M)$ の接空間は, $T_xU \oplus \{0\}$ と $\{v \oplus d\tilde{s}_u(v) \mid v \in T_xU\}$ である. したがって, $(x, 0) \in s(M) \cap s_0(M)$ において,

$$T_{(x,0)}s(M) + T_{(x,0)}s_0(M) = T_xU \oplus \mathbf{R}^n$$

が成立するための必要十分条件は, $d\tilde{s}_x$ が全射となることである.

(2) 上のように $U \times \mathbf{R}^n$ で考えると, $s^{-1}(0)$ は $\tilde{s}^{-1}(0)$ に写され, よって接空間は $\operatorname{Ker} d\tilde{s}_x$ になる. したがって

$$T_xM/T_x(s^{-1}(0)) = T_xM/\operatorname{Ker} d\tilde{s}_x \xrightarrow[\cong]{d\tilde{s}_x} \mathbf{R}^n \xrightarrow[\cong]{\phi|_{E_x}^{-1}} E_x$$

という線形同型写像がある. これは局所自明化 ϕ の取り方によらない. (詳細略) したがって法束 N は, E の制限と同型になる.

(3) s_0^*, $s^*\colon H_{cv}^*(E) \to H^*(M)$ は, $H_{cv}^*(E) \to H^*(E) \xrightarrow[\cong]{s_0^*, s^*} H^*(M)$ という合成と書ける．s と s_0 はホモトピックであることから $H^*(E) \to H^*(M)$ は, s^* でも s_0^* でも等しい．

(4) $s^{-1}(0)$ の管状近傍を T とし, 射影を $p\colon T \to s^{-1}(0)$ で表わす．すると $E|_T \xrightarrow[\cong]{\Psi} p^*E|_{s^{-1}(0)}$ というベクトル束の同型が存在する．(何故か？) そこで T から $E_{s^{-1}(0)}$ への写像 S を

$$S\colon T \xrightarrow{s} E|_T \xrightarrow[\cong]{\Psi} p^*E|_{s^{-1}(0)} \xrightarrow{\tilde{p}} E|_{s^{-1}(0)}$$

の合成写像によって定義する．ただし $\tilde{p}$ は

$$\begin{array}{ccc} p^*E|_{s^{-1}(0)} & \xrightarrow{\tilde{p}} & E|_{s^{-1}(0)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow[p]{} & s^{-1}(0) \end{array}$$

という p を cover する写像である．必要ならば T を小さく取り直すことによって, S が T と $E|_{s^{-1}(0)}$ の $s^{-1}(0)$ の開近傍の間の微分同相を与えることが分かる．

さて, $E|_{s^{-1}(0)}$ のトム類を, その台が上の $s^{-1}(0)$ の開近傍に含まれているような微分形式 Φ で実現する．このとき $S^*\Phi$ を T の外へ 0 で拡張した $[j_*(S^*\Phi)]$ が, $s^{-1}(0)$ のポアンカレ双対を与える．ところが上の図式とトム類の自然性により, $\Psi^*\tilde{p}^*\Phi$ は, $E|_T$ のトム類を与える微分形式であり, $S^*\Phi$ はこれを s で引き戻したものである．E のトム類を表わす微分形式 $\Phi(E)$ を取り, それを $E|_T$ に制限したものを $\Phi(E)|_T$ で表わすと, $\Phi(E)|_T = \Psi^*\tilde{p}^*\Phi + d\alpha$ となる $\alpha \in A_{cv}^*(E|_T)$ が存在する．したがって $[j_*(S^*\Phi)] = [j_*(s^*\Phi(E)|_T)]$ である．

さらに, $\Phi(E)$ の台を 0 切断の十分に近くに取るようにすると $s(M) \cap \mathrm{Supp}(\Phi(E)) \subset s(T)$ となるようにできる．したがって $j_*(s^*\Phi(E)|_T)$ は, $s^*\Phi(E)$ に等しく, (3) より $[s^*\Phi(E)] = e(E)$ であるから結論が従う．

略解 28. L の双対束 L^* の切断を,

$$\ell \in \mathbf{C}P^1 \longmapsto \mathrm{Hom}(L_\ell, \mathbf{C}) \ni \{L_\ell \ni (\ell, z) \mapsto z_1\}$$

によって定義する．ただし, $z = (z_1, z_2)$ と表わした．このとき, この切断が消えるのは, すべての $(\ell, z) \in L_\ell$ について $z_1 = 0$ となることであり, すなわち, $\ell = \mathbf{C}(0,1)$ となることである．この切断が 0-切断と横断的に交わることもすぐ分かる．(詳細略) したがって, $e(L)$ のポアンカレ双対は, $s^{-1}(0) = \{\mathbf{C}(0,1)\}$ (一点) である．さらに向きを適当に (複素平面の自然な向きから誘導されるものを) つけると, +1 であることも分かる．したがって,

$$\int_{\mathbf{C}P^1} e(L^*) = \int_{\mathbf{C}P^1} 1 \wedge \eta_{s^{-1}(0)} = \int_{\mathbf{C}(0,1)} 1 = 1$$

が分かる．