

幾何学 I 演習問題

担当: 中島 啓 TA: 木村嘉之, 森谷駿二, 山川大亮

2007年4月11日(水)

問題 1. n 次元球面 $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ が C^∞ 級微分可能多様体であることを, 授業に従って $2(n+1)$ 個の座標系を具体的に与えることで示せ.

問題 2. n 次元球面 $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ の北極と南極からの立体射影 $\varphi^+ : S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\varphi^- : S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\} \rightarrow \mathbf{R}^n$

$$\varphi^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}} \right),$$

を考える. φ^\pm は S^n の座標系を与えることを示せ.

また, 問題 1 の座標との座標変換が微分同相であることもチェックせよ.

問題 3. \mathbf{R}^2 内の正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ の向かい合う辺を, 授業で説明したように貼り合わせることができるクラインの壺 M に, C^∞ 級多様体の構造を定めよ.

問題 4. 複素射影空間 CP^n を, C^{n+1} 内の複素 1 次元部分空間の全体のなす集合として定義する. CP^n に適当な位相と, 座標近傍系を与えて, C^∞ 級多様体の構造を定めよ.

問題 5. $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $\varphi(x) = x^3$ で定義する. このとき (\mathbf{R}, φ) は, \mathbf{R} の座標近傍になる. このとき (\mathbf{R}, φ) だけからなる座標近傍系の族を考えて, \mathbf{R} に C^∞ 級多様体の構造を入れる.

(1) \mathbf{R} が, C^∞ 級多様体になっていることを確かめよ.

(2) $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $\psi(x) = x$ で定めるとき, (\mathbf{R}, φ) と (\mathbf{R}, ψ) の二つを合わせたものは, C^∞ 級多様体になっていないことを確かめよ.

問題 6. $X = Y = \mathbf{R}$ とし, M を X と Y を負の実数 (0 は含めない) のところで貼り合わせることができる集合とする. すなわち,

$$M = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times \{0, 1\}\} / \sim, \quad (x, 0) \sim (x, 1) \text{ if } x < 0.$$

M には商位相を入れる. すなわち $\pi : \mathbf{R} \times \{0, 1\} \rightarrow M$ を自然な射影とするとときに, $\pi^{-1}(U)$ が開集合であるときに, U を開集合と定義する.

(1) M はハウスドルフ空間ではない.

(2) U_0 を $\{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\}$ の π による像とし, U_1 を $\{(x, 1) \mid x \in \mathbf{R}\}$ の π による像とする. $\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbf{R}$ を $(x, 0) \mapsto x$, $(x, 1) \mapsto x$ で定義する. これが well-defined であり, 同相写像であることをチェックせよ.

(3) $\varphi_0 \cap \varphi_1^{-1}$ が, $\varphi_1(U_0 \cap U_1)$ で C^∞ 級写像であることをチェックせよ.

したがって, M はハウスドルフ公理以外の多様体の定義を満す.

*問題 7. \mathbb{R}^n 内の k 次元部分空間の全体のなす集合 $G(k, n)$ をグラスマン多様体という.
 $G(k, n)$ に適当に位相と座標系を入れて, C^∞ 級多様体であることを証明せよ.