幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 木村嘉之, 森谷駿二, 山川大亮

2007年4月25日(水)

先週の演習問題の略解は
`http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/07_Kika1.html`
を参照のこと.

問題 14. 授業で示したように, n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n$ 上の関数

$$f([x_0 : \cdots : x_n]) = \frac{x_0^2}{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

は C^∞ 級であった. その微分 df_p が消えるような $p \in \mathbf{R}P^n$ をすべて求めよ. また, f の最大値, 最小値を求めよ.

問題 15. (1) **問題 8** のように, $i\colon S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ を包含写像とする. i の微分写像 $di_p\colon T_pS^n \to T_{i(p)}\mathbf{R}^{n+1}$ を計算せよ. ただし, $\mathbf{R}^{n+1}$ の方の接空間は, 自然な座標系によって $T_{i(p)}\mathbf{R}^{n+1} \cong \mathbf{R}^{n+1}$ と同一視せよ. このとき di_p の像が, p と直交するベクトルの全体であることを証明せよ.

(2) $x_1\colon \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ を, 座標の第一成分を取る写像とし, $f = x_1 \circ i$ と定義する. f の微分が消える点をすべて求めよ. また, f の最大値, 最小値を求めよ.

問題 16. M, N を C^∞ 級多様体とする.
M と N の間に微分同相写像 $F\colon M \to N$ が存在するとき, M と N の次元が同じであることを証明せよ.

問題 17. M を C^∞ 級多様体とし, $x \in M$ とする.
(1) M に入る C^∞ 級曲線 $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ で $c(0) = x$ となるものを考える. ただし ε は正の実数である. このとき, $t = 0$ における速度ベクトル $\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ を, x における M の接空間 T_xM に属する元として, しかるべく定めよ.

(2) 逆に, T_xM の元 v に対して, 上のような曲線 c で $v = \left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ となるものが存在することを示せ. (ε は, 小さく取ってよい.)

問題 18. **問題 13** の写像 $f\colon T^2 \to T^2$ $(x, y) \mapsto (2x, 2y)$ について, その微分 $df_p\colon T_pT^2 \to T_{f(p)}T^2$ は全ての p に対して同型写像であることを示せ.

問題 19. 自然な写像 $\pi\colon S^n \to \mathbf{R}P^n$ について, その微分 $d\pi_p\colon T_pS^n \to T_{\pi(p)}\mathbf{R}P^n$ は全ての p について同型写像であることを示せ.

問題 20. 多項式写像 $f\colon \mathbf{R}P^1 \to \mathbf{R}P^1$ を

$$f([x:y]) = [x^n : a_n y^n + a_{n-1}xy^{n-1} + \cdots + a_0 x^n]$$

で定める. $(n \geq 1,\ a_n \neq 0)$ f の微分 df_p が消える p をすべて求めよ.

問題 21. (1) M を C^∞ 級微分可能多様体とする. M の開集合 V のうちで, どこかの座標近傍系 (U,φ) の定義域の U に含まれているようなものの全体を $\mathcal{O}$ であらわす. (座標近傍系は, すべて動かす.) このとき, $\mathcal{O}$ が, M の位相空間としての開基 (開集合系の基) となることを示せ.

(2) 二つの C^∞ 級微分可能多様体 M, N の間の写像 $F\colon M \to N$ が C^∞ 級であるための必要十分条件は, N 上の任意の C^∞ 級関数 g に対して, $g \circ F$ が M 上の C^∞ 級関数になることであることを証明せよ.

(3) 二つの位相空間 X, Y の間の写像 $F\colon X \to Y$ が, Y 上の任意の連続関数 $g\colon Y \to \mathbf{R}$ を, X 上の連続関数 $g \circ F\colon X \to \mathbf{R}$ に移すという. このとき F は連続写像か？