幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 木村嘉之, 森谷駿二, 山川大亮

2007年6月20日(水)

先週の演習問題の略解は
`http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/07_Kika1.html`
を参照のこと.

問題 52. 3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の, 三つの C^∞ 級関数の組 $F = (F_1, F_2, F_3)$ に対して,

$$\omega_1 \overset{\text{def.}}{=} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz, \qquad \omega_2 \overset{\text{def.}}{=} F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

と定義する. $d\omega_1$, $d\omega_2$ を計算し, 電磁気学における $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$, $\operatorname{curl} F = \nabla \times F$ $(\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z))$ が, 現れることをチェックせよ.

問題 53. 2次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ から原点0を除いた空間 $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ を, ユークリッド空間の開集合として自然に C^∞ 級微分可能多様体とみなす. $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の1次微分形式を

$$\omega \overset{\text{def.}}{=} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

で定義する.
(1) $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の極座標 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を用いて, ω を dr, $d\theta$ で表わせ.
(2) $d\omega = 0$ を証明せよ.
(3) $\omega = dF$ となるような $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の C^∞ 級関数 F は存在するか？

問題 54. $\mathbf{R}^{2n}$ 上の二次微分形式 $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$ について, $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n\text{個}}$ を計算せよ.

問題 55. 二次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ を考える. 包含写像を $i\colon S^2 \to \mathbf{R}^3$ とする.
(1) $i^*(dx \wedge dy \wedge dz)$ を求めよ.
(2) $i^*(dx \wedge dy)$ の値が0になる球面の点を全て求めよ.

問題 56. **問題** 50 の拡張として、X をベクトル場, α を k 次微分形式とするときに、$L_X\alpha$ を

$$(L_X\alpha)(X_1,\ldots,X_k) = X(\alpha(X_1,\ldots,X_k)) - \sum_{i=1}^{k} \alpha(X_1,\ldots,[X,X_i],\ldots,X_k)$$

によって定義する。α の X による **Lie 微分**という。

(1) $L_X\alpha$ が k 次微分形式であることをチェックせよ。

(2) X, Y がベクトル場のときに、$L_XL_Y - L_YL_X = L_{[X,Y]}$ を示せ。

(3) $L_X(\alpha\wedge\beta) = (L_X\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(L_X\beta)$ を示せ。

(4) $dL_X = L_Xd$ を示せ。

問題 57. X をベクトル場、α を k 次微分形式とするときに、α と X の**内部積** $i(X)\alpha$ を次で定義する。

$$(i(X)\alpha)(X_1,\ldots,X_{k-1}) = \alpha(X,X_1,\ldots,X_{k-1})$$

$i(X)\alpha$ は、$(k-1)$ 次微分形式である。

(1) $i(X)(\alpha\wedge\beta) = (i(X)\alpha)\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge(i(X)\beta)$ を示せ。ただし、α は k 次微分形式とした。

(2) $i([X,Y]) = L_Xi(Y) - i(Y)L_X$ を示せ。

(3) $L_X = i(X)d + di(X)$ を示せ。(Cartan の公式とよばれる。)