略解 58. [松本, 問題 20.6] を見よ。

略解 59. S^n は局所座標系 (φ_+, U_+), (φ_-, U_-) で覆われていたので、その座標変換のヤコビ行列式はどちらも正もしくは負となっている。よって片方の座標の符号を適当に取り替えることにより向きを与える座標系を得る。

略解 60. (1) 略

(2) $\mathbf{R}P^2$ は $[-1,1]\times[-1,1]$ を境界を中心に点対称に貼り合わせることで得られる。特に、(開いた) メビウスの帯を開部分多様体として含んでおり、これは向き付け可能ではない。

略解 61. (1) **略解 33** のようにヤコビ行列をブロック表示する。

$$df_p = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

略解 **33** の計算より、$\det(df_p) = \det((A+\sqrt{-1}B)(A-\sqrt{-1}B))$ となり、$\det((A+\sqrt{-1}B)(A-\sqrt{-1}B)) = |\det(A+\sqrt{-1}B)|^2$ より常に非負であることが分かる。

(2) $\mathbf{C}P^n$ の座標系を**略解 4** のようにとる。(1) よりヤコビ行列式が非負であることが分かり、また座標変換であるからヤコビ行列式は 0 ではない。よって、$\mathbf{C}P^n$ は向き付け可能である。

略解 62. $\alpha = dg$ と書けたとする。よって $\int_{S^1} dg = g(1) - g(0)$ となる。g は S^1 上の関数であったから、特に $g(1) = g(0)$ であり、$\int_{S^1} \alpha = 0$ が分かる。また、逆に、$g(x) = \int_0^x f(x)dx$ と定めると、$\int_{S^1} \alpha = 0$ より、S^1 上の関数を定め、$\alpha = dg$ と書けることが分かる。

略解 63. 問題文の仮定に加えて、さらに X はハウスドルフかつ局所コンパクトと仮定する。(さもないと反例がある。)

まず、X は、高々可算個の開集合 $\{U_n\}_{n\geq 1}$ の和集合として表され、しかも $\overline{U_n}$ はコンパクトであり、$\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ を満すものがとれることを示す。

X が局所コンパクトであるから、任意のコンパクト集合 K に対して、開集合 U であって、$U \supset K$ かつ $\overline{U}$ がコンパクトなものが取れる。(省略)

いま、上のような $U_1 \supset K_1$ をとる。$\overline{U_1} \cup K_2$ に対して上述のように U_2 をとり、以下同様に U_n を取れば、条件を満すような $\{U_n\}_{n\geq 1}$ が取れる。

さて、$F_1 = \overline{U_1}, F_n = \overline{U_n} \setminus U_{n-1}$ とおけば、これらはコンパクト集合であり、$X = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ を満している。また、$V_1 = U_2, V_2 = U_3, V_n = U_{n+1} \setminus \overline{U_{n-2}}$ とおくと、X はハウスドルフであったからこれらは開集合である。また、定義から、$F_n \subset O_n$ を満たすことが分かる。

$\{V_\lambda\}$ を X の任意の開被覆とする。

F_n の点 x に対して $W_x \subset O_n \cap V_\lambda$ なる近傍を取る。このとき、$\{W_x\}$ は F_n の開被覆であり、F_n はコンパクトであったから、有限個の $x_1^{(n)}, \cdots, x_{p_n}^{(n)}$ が存在して、F_n は、$\{W_{x_j^{(n)}}\}_{1\leq \leq p_n}$ で覆われる。このとき、$\{W_{x_j^{(n)}}\}_{n\geq 1, 1\leq j\leq p_n}$ は定義から、$\{V_\lambda\}$ の細分であり、これが局所有限被覆であることは簡単に確かめられる。よって、X がパラコンパクトであることが示せた。

略解 64. $F(x) = F(y)$ であるとする．どれかの $\rho_\alpha(x) \neq 0$ であるが, F の定義から $\rho_\alpha(y) \neq 0$ となる．すると $x, y \in U_\alpha$ である．このとき φ_α が U_α では座標であることから, 条件から $x = y$ である．F の微分が単射であることは容易に分かる．