略解 65. M の座標近傍 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_\alpha$ で, 各 U_α が連結なものをとる. また, 2点からなる集合として $\{\pm 1\}$ をとる. まず, $\widetilde{M}$ を集合として次のように定義する.

$$\widetilde{M} := \coprod_\alpha U_\alpha \times \{\pm 1\}/\sim$$

ただし, $(x,\delta)\in U_\alpha\times\{\pm 1\}$, $(y,\varepsilon)\in U_\beta\times\{\pm 1\}$ に対して, $(x,\delta)\sim(y,\varepsilon)$ を次の2条件が成り立つことと定義する.

- M の点として $x=y$.
- $\delta\times\varepsilon\times det\big[D(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})_{\varphi_\beta(x)}\big]>0$.

2つ目の条件は φ_α と φ_β が $x(=y)$ で同じ向きのとき, $(x,\pm 1)$ と $(y,\pm 1)$ を貼り合わせ, 逆向きのとき, $(x,\pm 1)$ と $(y,\mp 1)$ を貼り合わせることを意味する. (複合同順) $\widetilde{M}$ に商位相を入れて位相空間にする. (各 $U_\alpha\times\{\pm 1\}$ には積位相を入れ, $\coprod_\alpha U_\alpha\times\{\pm 1\}$ にはそれらの直和位相を入れる.) $\widetilde{M}$ がハウスドルフ空間になることは明らか. $\pi:\widetilde{M}\to M$ を合成 $U_\alpha\times\{\pm 1\}\to U_\alpha\to M$ から誘導される写像とする. (これは well-defined である.) (2) が成り立つことは容易にわかる.

$\widetilde{M}$ が連結であることは次のようにして示せる. $U_\alpha\times\{+1\}$, $U_\alpha\times\{-1\}$ を自然に $\widetilde{M}$ の部分集合とみなしたものをそれぞれ U_α^+, U_α^- とする. これらは $\widetilde{M}$ の開集合であることがわかる. π を $U_\alpha^\pm$ に制限すると, U_α への同相写像になることは容易にわかる. この事から, M の任意の2点 x,y と x から y へ進む曲線 $c:[0,1]\to M$ に対して, $\pi^{-1}(x)$ の任意の1点 $\tilde{x}$ をとると, $\widetilde{M}$ の曲線 $\tilde{c}:[0,1]\to\widetilde{M}$ で, $\tilde{c}(0)=\tilde{x}$, $\pi\circ\tilde{c}=c$ となるものが一意的に存在することが示せて, またこのことから,$\widetilde{M}$ の連結成分が多くとも2個で, もし2個あるならば, U_α^+ と U_α^- は必ず異なる連結成分に含まれることがわかる. よって2個あると仮定すると, そのうちの一方 M' を固定し, M の座標系 $\{(U_\alpha,\varphi'_\alpha)\}$ を, $U_\alpha^+\subset M'$ なる α については $\varphi'_\alpha=\varphi_\alpha$, $U_\alpha^-\subset M'$ なる α については φ'_α を φ_α と逆向きの座標として定めることができる. (例えば, $\varphi_\alpha=(x_1,\cdots,x_n)$ と表して $\varphi'_\alpha:=(-x_1,\cdots,x_n)$ とおけばよい.) この座標系は M に向きを定めることが容易にわかり, よって M が向き付け不能という仮定に反する. よって $\widetilde{M}$ は連結.

次に, $\widetilde{M}$ の C^∞ 級座標近傍系をつくる. U_α^+ 上の座標 φ_α^+ を, $U_\alpha^+=U_\alpha$ と自然に同一視することにより $\varphi_\alpha^+:=\varphi_\alpha$ と定め, U_α^- 上の座標 φ_α^- を, $U_\alpha^-=U_\alpha$ と同一視することにより, φ_α^- と逆向きの座標として定める. このようにつくった $\{(U_\alpha^\pm,\varphi_\alpha^\pm)\}$ が $\widetilde{M}$ の C^∞ 級座標近傍系になっていることは容易にわかる. またこの座標近傍系のどの2つの座標も同じ向きであることも明らか. よって $\widetilde{M}$ は向き付け可能な C^∞ 級多様体となる. (3) が成り立つことは $\widetilde{M}$ への可微分構造の入れ方から明らか.

略解 66. (1) [松本, 演習問題 20.5] を参照.

(2) $\mathbf{C}P^1$ のもう一方の非同次座標 $\psi:U_1=\{[z_0:z_1]|z_1\neq 0\}\to\mathbf{C};[z_0:z_1]\mapsto z_0/z_1$ をとると. $\psi\circ\varphi^{-1}(w)=1/w$ となる.$\{\varphi,\psi\}$ が $\mathbf{C}P^1$ に向きを定めることをいうには, 対応 $x+iy\leftrightarrow(x,y)$ によって $\psi\circ\varphi^{-1}$ を $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ の間の写像とみなしたとき, そのヤコビ行列の行列式が正であることを言えばよいが, これは直接計算すればわかる.

(3) ヒントの部分について：(2) と同じ記号を使う．$\mathbf{C}$ における中心 0 半径 R の閉円盤を $B_R(0)$ とし，$P_0 = [1:0]$ の近傍 $\varphi^{-1}(B_R(0))$ を $B_R(P_0)$ とおく．同様に $P_1 = [0:1]$ の近傍 $\psi^{-1}(B_R(0))$ を $B_R(P_1)$ とおく．φ と ψ の間の座標変換は 中心 0 半径 R の閉円盤 (から中心を除いたもの) を中心 0 半径 $1/R$ の開円盤の補集合に写すから，

$$B_R(P_0) \cup B_{1/R}(P_1) = \mathbf{C}P^1,\ B_R(P_0) \cap B_{1/R}(P_1) = \partial B_R(P_0)$$

となる．よって，$\mathbf{R}^2$ の部分集合上の関数の積分の性質から，

$$\int_{\mathbf{C}P^1} \omega = \int_{B_R(P_0)} \omega + \int_{B_{1/R}(P_1)} \omega$$

となる．$(\psi^{-1})^*\omega = f dx \wedge dy$ と表したとき，$|f|$ の $B_1(0)$ における最大値を M とすると，$R > 1$ のとき，

$$\left| \int_{B_{1/R}(P_1)} \omega \right| \leq \int_{(B_{1/R}(0)} M = \frac{\pi M}{R^2}$$

となり，よって，$R \to +\infty$ のとき，$\int_{B_{1/R}(P_1)} \omega \to 0$ となる．従って $\lim_{R \to +\infty} \int_{B_R(P_0)} \omega = \int_{\mathbf{C}P^1} \omega$ となるが, 定義から左辺は $\int_{\mathbf{C}} \omega$ に等しい.

後半は [松本, 演習問題 20.4] を参照.

略解 67.

$$d\omega = \frac{\partial f(z)}{\partial y} dy \wedge dx + i \frac{\partial f(z)}{\partial x} dx \wedge dy$$

であるから、コーシー・リーマン方程式より結論を得る。

略解 68. (1) 略

(2) C_ε を $c(\theta) = (\varepsilon \cos\theta, \varepsilon \sin\theta)$ とパラメーター付けすると, c は反時計回りに C_ε を回るから,

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx = \int_0^{2\pi} \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c(\theta)) \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(c(\theta)) \sin\theta \right) d\theta = 2\pi$$

となる.

(3)C_ε が D の内部に含まれるように $\varepsilon > 0$ をとる．D' を D から C_ε の内部をとりのぞいた領域とする．D' に $\mathbf{R}^2$ の自然な向きから定まる向きを入れ, $\partial D'$ にはこの D' の向きから決まる向きをいれる．このとき, 向き付き多様体として $\partial D' = C \sqcup (-C_\varepsilon)$ となる．ただし, $-C_\varepsilon$ は C_ε に (2) と逆の向きを与えたものである．$\omega = (\partial f/\partial x)dy - (\partial f/\partial y)dx$ とおくと, $d\omega = (\Delta f) dx \wedge dy = 0$ となるから, ストークスの定理より, $\int_{\partial D} \omega = 0$ となり, よって,

$$\int_C \omega = \int_{C_\varepsilon} \omega = 2\pi$$

となる.

略解 69. (1) $M = \partial D_R \times [0,1]$ という円柱を取り, 境界つき二次元多様体と考える. ($\partial M = \partial D_R \times \{0\} \sqcup \partial D_R \times \{1\}$ である.) $F(z,t) = tf(z) + (1-t)f_0(z)$ によって, $F\colon M \to \mathbf{C}$ を定義する. R を十分に大きく取れば, F は, 0 を取らず, $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ への写像を定める. したがって $F^*\omega$ は, M 上の C^∞ 級 1 次微分形式である. よって Stokes の定理より

$$0 = \int_M F^*(d\omega) = \int_M dF^*\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial D_R} f^*\omega - \int_{\partial D_R} f_0^*\omega$$

となる. $\int_{\partial D_R} f_0^*\omega$ は, 具体的に計算して $2\pi n$ である.

(2) f が, D_R で零点を持たないと, f は $D_R \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ という写像となり, $f^*\omega$ は, D_R 上の C^∞ 級 1 次微分形式となる. したがって D_R に Stokes の定理を用いて

$$\int_{\partial D_R} f^*\omega = \int_{D_R} d(f^*\omega) = 0$$

となって矛盾する.

略解 70. (1) まず U を x の座標近傍とすれば, U 上の座標が定めるベクトル場 $v_1, \ldots, v_n$ は各点 $y \in U$ で接ベクトル空間の基底を与える. $v_{1,y}, \ldots, v_{n,y}$ からシュミットの直交化法 (線形代数の教科書を参照のこと) を使って T_yM の g_y に関する正規直交基底 $e_{1,y}, \ldots, e_{n,y}$ をつくる. $i = 1, \ldots, n$ に対して $y \mapsto e_{i,y}$ が U 上の C^∞ 級ベクトル場になっていることはシュミットの直交化法の手順を考えれば容易にわかる.

(2)T_yM の別の正規直交基底 $e'_{1,y}, \ldots, e'_{n,y}$ をとり, その双対基底を $\theta'_{1,y}, \ldots, \theta'_{n,y}$ とする. $e_{1,y}, \ldots, e_{n,y}$ と $e'_{1,y}, \ldots, e'_{n,y}$ の間の変換行列を A とすると A は直交行列で, $\theta'_{1,y}, \ldots, \theta'_{n,y}$ と $\theta_{1,y}, \ldots, \theta_{n,y}$ の間の変換行列は ${}^tA$ でこれも直交行列だから, $\theta_{1,y}, \ldots, \theta_{n,y}$ が正規直交基底となるような内積では $\theta'_{1,y}, \ldots, \theta'_{n,y}$ も正規直交基底になる. よって, $e_{1,y}, \ldots, e_{n,y}$ のとり方によらないことがわかる.

(3) 小テスト**問題 2** の結果から, 直交行列の k 次小行列の行列式を並べてできる行列が再び直交行列になることを言えば, 後は (2) と同様にできるが, このことは小行列の次数 k に関する帰納法により証明できる. 詳細は略す.

(4)(2) と同じ記号を使うと, 小テストでやったことから

$$\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = (det\, {}^tA)\, \theta'_1 \wedge \cdots \wedge \theta'_n$$

A は直交行列だから, $det\, {}^tA = det\, A = \pm 1$ となり, 主張が示された.

(5)(2) と同じ記号を使い, $e'_{1,y}, \cdots, e'_{n,y}$ も問題の条件を満たしているとする. このとき, $det\, A > 0$ となることが容易にわかり, よって, $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = \theta'_1 \wedge \cdots \wedge \theta'_n$ となり, ω_y は g_y と向きだけできまる. また, 各点 $x \in M$ の座標近傍 U 上では, $\omega_{U,y} := \omega_y$ によって U 上の C^∞ 級微分形式 ω_U が定まり, 今示した一意性から, これらが貼り合って M 上の C^∞ 級微分形式 ω が定まる.

略解 71. (1)S^{n-1} の向きを次のように定める.

S^{n-1} の座標近傍 $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ が向きを与える
$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(X, \partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_{n-1})$ が定義される範囲で常に正.

これは明らかに well-defined である．S^{n-1} の体積要素 ω 各 $x \in S^{n-1}$ に対して, **問題 70**,(5) の条件を満たす T_xS^{n-1} の正規直交基底 $e_1, \dots, e_1$ をとると $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$ となる $n-1$ 次微分形式として特徴づけられる．よって X と S^{n-1} の接ベクトルが直交することと, S^{n-1} の向きの定め方から, $\omega = i(X)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ となる．

(2) (1) と同様にすればよいので省略する．

略解 72. (1) 自然に $T_xS^{n-1} \subset T_xB^n = \mathbf{R}^n$ とみなす．$r : B^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ を $r(x) = |x|$ により, $\varphi : B^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ を $\varphi(x) = x/|x|$ により定める．**問題 71** と同じ記号を使うと, 各 $x \in S^{n-1}$ に対しては $dr_x(X_x) = |x|$ で, X_x に直交するベクトル, つまり T_xS^{n-1} に属すベクトル v については $dr_x(v) = 0$ となる．また $d\varphi_x : T_xB^n \setminus \{0\} \to T_xS^{n-1}$ は $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ の $n-1$ 次元部分空間への写像とみなすと, X_x に直交するベクトルを $1/|x|$ 倍することがわかる．従って, $B^n \setminus \{0\}$ 上で,

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = r^{n-1} dr \wedge \varphi^* \omega_{S^{n-1}}$$

となることがわかる．さらに, $B^n \setminus \{0\}$ 上の $n-1$ 次微分形式 η を

$$\eta = \frac{1}{n} r^n \varphi^* \omega_{S^{n-1}}$$

で定義すると, $d\eta = r^{n-1} dr \wedge \varphi^* \omega_{S^{n-1}}$ となる．$\mathbf{R}^n$ における原点を中心とする半径 ε の球面を S_ε^{n-1} とする．B^n から S_ε^{n-1} の内側, つまり $|x| < \varepsilon$ の部分を除いたものを B_ε^n とおき, これに R^n の自然な向きから定まる向きを入れ, ∂B_ε^n には B_ε^n から定まる向きをいれておくと, 向き付き多様体として $\partial B_\varepsilon^n = S^{n-1} \cup (-S_\varepsilon^{n-1})$ となる．但し,S_ε^{n-1} の向きは微分同相 $\psi : S^{n-1} \ni x \mapsto \varepsilon x \in S_\varepsilon^{n-1}$ が向きを保つようにとっておき, $-S_\varepsilon^{n-1}$ はこれと逆の向きを入れたものとする．S^{n-1} の体積をそれぞれ $v(B^n)$, $v(S^{n-1})$ とおくと, **略解 66**,(2) と同様に, $v(B^n) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon^n} d\eta$ となるが, ストークスの定理より,

$$\int_{B_\varepsilon^n} d\eta = \int_{\partial B_\varepsilon^n} \eta = \int_{S^{n-1}} \eta - \int_{S_\varepsilon^{n-1}} \eta$$

となり, $\int_{S^{n-1}} \eta = (1/n)v(S^{n-1})$ で, $\int_{S_\varepsilon^{n-1}} \eta = \int_{S^{n-1}} \psi^* \eta = (\varepsilon^n/n)v(S^{n-1}) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ となるから, (最初の変形は S_ε^{n-1} への向きの入れ方と, 多様体上の積分の定義から容易に確かめれる.)

$$v(S^{n-1}) = nv(B^n)$$

となる．

略解 73. C のパラメーター付け $c : [0,1] \to C$ を $c(0) = c(1)$, 両端以外は単射で, 任意の $s \in [0,1]$ に対して, $(dc/dt)(s) \neq 0$ でこの接ベクトルが向きに適合している (これが何のことを言っているかは明らかであろう) ようにとる．各 $t \in [0,1]$ に対して, t の近傍 U を十分小さくとれば、$c(U)$ は極座標 (r, θ) の θ が一価関数としてとれる開集合におさまる．このとき $s \in U$ に対して

$$\frac{dc}{dt}(s) = \frac{d(r \circ c)}{dt} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d(\theta \circ c)}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

となる．(左辺は添え字 s を省略した.) ここで, θ の不定性は $+2\pi\times$ (整数) のみなので, $\partial/\partial\theta, d(\theta\circ c)/dt$ は θ のとり方によらずに定まり, $\partial/\partial\theta$ は C を含む開集合上で定義されたベクトル場、$d(\theta\circ c)/dt$ は $[0,1]$ 全体で定義された関数となり, 上の等式はすべての s に関して成り立つ. 通常の $\mathbf{R}^2$ の座標を (x,y) とかくと, $\partial/\partial r, \partial/\partial\theta$ を $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ で表すことによって, $|\partial/\partial r| = 1, |\partial/\partial\theta| = r, (\partial/\partial r, \partial/\partial\theta) = 0$ となることがわかる．ここで, $(\ ,\ )$ は $\mathbf{R}^2$ の標準的な計量を表し, $|\cdot|$ はこの計量から定まるノルムを表す．よって

$$\left|\frac{dc}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{d(\theta\circ c)}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d(\theta\circ c)}{dt}\right)^2}$$

となる．従って, $c^*\omega_C = \sqrt{(d(\theta\circ c)/dt)^2 + r^2(d(\theta\circ c)/dt)^2}dt$ となる．よって

$$\begin{aligned}\int_C \omega_C &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d(\theta\circ c)}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d(\theta\circ c)}{dt}\right)^2}dt \geq \int_0^1 r\left|\frac{d(\theta\circ c)}{dt}\right|dt \\ &> \int_0^1 \left|\frac{d(\theta\circ c)}{dt}\right|dt \geq \int_0^1 \frac{d(\theta\circ c)}{dt}dt = \int_C d\theta = \int_{C_1} d\theta = 2\pi\end{aligned}$$

となる．ここで, 最初の等号なし不等号には r が常に 1 より大きいこと, $d(\theta\circ c)/dt$ が恒等的には 0 でないことを使った．また, 最後から 2 つ目の等号は単位円 C_1 と C にはさまれる領域 D' と $d\theta$ に対してストークスの定理を適用することによって得られる．

略解 74. (1)∂M に入っている向きは, **問題 71**,(2) で N を外向きにとったときに ∂M にはいる向きに一致することがわかる．従って, $dA = i(N)dx\wedge dy\wedge dz$ となる．一方**問題 57**,(1) を使うと, $\omega_2 = i(F)dx\wedge dy\wedge dz$ となることがわかる．ここで, 各 $x\in M$ に対して自然な同一視 $\mathbf{R}^3 = T_x\mathbf{R}^3 = T_xM$ によって F を M 上のベクトル場とみなしている．$i^*\omega_2 = (F,N)dA$ を示すには, 任意の $x\in\partial M$ に対して, $T_x(\partial M)$ の正規直交基底 E_1, E_2 をとったとき

$$i^*\omega_2(E_1,E_2) = (F,N)dA(E_1,E_2)$$

となることを示せばよいが, (記号を省略して, $(i^*\omega_2)_x, dA_x$ 等と書くべきところを $i^*\omega_2, dA$ 等と書いた．以下も同様.) $T_x(\partial M)$ を T_xM の部分空間とみなすと $F = (F,N)N + (F,E_1)E_1 + (F,E_2)E_2$ と表せて, ω_2 の多重線形性と交代性を使うと,

$$i^*\omega_2(E_1,E_2) = \omega(F,E_1,E_2) = \omega((F,N)N,E_1,E_2) = (F,N)dA(E_1,E_2)$$

となり, 結果を得る．

(2) **略解 52** より, (1) とストークスの定理から結論が従う．

略解 75. 水面に出ている部分を切り取って, D が完全に水没しているとしてよい．(ストークスの定理は角 (カド) のある多様体 (境界が区分的に C^∞ 級な「多様体」) でも種々の概念を適当に定義すれば成り立つ.) **問題 74** の 2 次元における類似を考える．$\mathbf{R}^2$ 上の関数の組 $G = (G_1, G_2)$ に対して, $\mathbf{R}^2$ 上の微分形式 ω^G を $\omega^G = G_1dy - G_2dx$ で定めると $d(\omega^G) = (\partial G_1/\partial x + \partial G_2/\partial y)dx\wedge dy$ となる．$i: C = \partial D \to D$ を包含写像とすると, **問題**

74 と同様に, $i^*(\omega^G) = (G, \overrightarrow{n})ds$ となる. $G = (y, 0)$, $(0, y)$ とおいたときの ω^G をそれぞれ η_1, η_2 とすると, ベクトル値微分形式 $\overrightarrow{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ ができる. $\overrightarrow{\eta}$ と D に成分ごとにストークスの定理を使うと,

$$\int_D d\overrightarrow{\eta} = \int_C y\overrightarrow{n}\,ds$$

一方 $d\eta_1 = 0, d\eta_2 = dx \wedge dy$ となるから, ベクトル $\int_D d\overrightarrow{\eta}$ は y 軸正の向きを向いていて, 大きさは D の面積に等しい.