略解 14. $\mathbf{R}P^n$ には非同次座標を入れて考える。$U_0=\{x_0\neq 0\}$ では、

$$f([1:y_1:y_2:\cdots:y_n])=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

となり微分は、

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}=-\frac{2y_i}{(1+\sum_{i=1}^n y_i^2)^2}$$

で与えられ、$y_1=y_2=\cdots=y_n=0$ が微分が消えているような点である。$U_i=\{x_i\neq 0\}$ $(i\geq 1)$ では、

$$f([y_1:y_2:\cdots:y_{i-1}:1:y_i:\cdots:y_n])=\frac{y_1^2}{1+\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

となり、微分は、

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}=\frac{2y_1(1+y_2^2+\cdots+y_n^2)}{(1+\sum_{i=1}^n y_i^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y_i}=-\frac{2y_1^2y_i}{(1+\sum_{i=1}^n y_i^2)^2}\ (i\geq 2)$$

で与えられ、$y_1=0$ で微分が消えていることが確かめられる。微分が消えている点は、$[1:0:\cdots:0]$ と $[0:x_1:x_2:\cdots:x_n]$ (但し $x_1,\cdots,x_n$ は任意) である。最大値 (最小値) をとる点では微分が消えているので、f の最大値、最小値はそれぞれ 1 と 0 である。

略解 15. (1) **問題** 8 のように座標をとって考える。$U_j=\{x_j\neq 0\}$ 上では包含写像の微分は、以下で与えられる。

$$d(i\circ\varphi_j^{-1})(\sum_{1\leq k\leq n}a_k\frac{\partial}{\partial y_k})=\sum_{1\leq k\leq j-1}a_k\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_{1\leq k\leq n}a_k\frac{\partial f_j}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j\leq k\leq n}a_k\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}$$

ここで、$f_j=\sqrt{1-\sum_{k=1}^n y_k^2}$ である。行列で表わせば

$$\left[\begin{array}{c|c} 1_{j-1} & 0 \\ \hline \partial_1 f_j & \cdots\quad \partial_n f_j \\ \hline 0 & 1_{n-j+1}\end{array}\right],\qquad 1_k \text{ はサイズ } k \text{ の単位行列},\quad \partial_k f_j=\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$$

である. 上式より、微分が単射であることが分かる。また、$p=(y_1,\ldots,y_{j-1},f_j,y_j,\ldots,y_n)$ に注意して、任意の接ベクトル $v\in T_pS^n$ に対して、

$$(p,(di)_p(v))=\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{j-1} & f_j & y_j & \cdots & y_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_{j-1}\\ \sum a_k\partial_k f_j\\ a_j\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=0$$

が成りたつことが確かめられ、像が p と直交するベクトル空間に含まれることが分かる。よって、微分の単射性より、像が p と直交するベクトル空間に一致することが分かる。

(2) 座標系を取って微分を計算してもよいが, 次のように示すことができる. まず x_1 の微分 $dx_1\colon T_x\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}$ は, $T_x\mathbf{R}^{n+1}\cong\mathbf{R}^{n+1}$ という同一視の下, ベクトル $\left[\begin{smallmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{smallmatrix}\right]$ となる. このとき $df_p = d(x_1)_{i(p)}\circ di_p$ であるから, $df_p=0$ となる必要充分条件は, $\left[\begin{smallmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{smallmatrix}\right](di_p(T_pM))=0$ であり, (1) の計算により, これは p (を $\mathbf{R}^{n+1}$ の元と考えて, さらに内積によって横ベクトルと考えてもの) が, $\left[\begin{smallmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{smallmatrix}\right]$ と平行になることと同値である. これは $p=\left[\begin{smallmatrix}\pm1 & 0 & \cdots & 0\end{smallmatrix}\right]$ となることに他ならない. 最大値, 最小値はいうまでもなく, 1, -1 である.

略解 16. まず, F の微分 $dF_p\colon T_pM\to T_{F(p)}N$ は線形空間の間の同型写像である. 実際, 逆写像は $d(F^{-1})_{F(p)}$ である. よって $\dim T_pM=\dim T_{F(p)}N$ であり, 多様体の次元は接空間の線形空間としての次元に等しいから, $\dim M=\dim N$ が成り立つ.

略解 17. (1) $v=\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ とおく. C^∞ 級関数 f に対して, $vf=\left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0}$ とおけば, 接ベクトルの定義の性質を満す.

(2) x が原点に移される座標 $\varphi\colon U\to V$ を取って, $v=\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ と表わしたとき, $c(t)=\varphi^{-1}(a_1t,a_2t,\ldots,a_nt)$ とすればよい. このとき上のように定めたものが, v になることは座標を取って考えているので明らかである.

略解 18. 問題 13 のように座標を取って計算すると, df_p は単位行列の 2 倍となるから正しい.

略解 19. $S^n=\{(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^{n+1}\mid x_0^2+\cdots+x_n^2=1\}$ とすると, $\pi(x_0,\ldots,x_n)=[x_0:\cdots:x_n]$ である. **問題 1** のように S^n に座標 $\varphi_i^\pm$ を入れ, また $\mathbf{R}P^n$ に非同次座標 ψ_i (すなわち $\psi_i([x_0:\cdots:x_n])=(x_0/x_i,\ldots,\widehat{x_i/x_i},\ldots,x_n/x_i)$) を入れると

$$\psi\circ\pi\circ(\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1,\ldots,y_n)=\pm\left(\frac{y_1}{\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}},\ldots,\frac{y_n}{\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}}\right)$$

となる. これは C^∞ 級写像である. 微分は

$$\frac{\partial(\text{第}\,\alpha\,\text{成分})}{\partial y_\beta}=\pm(1-|y|^2)^{-3/2}(y_\beta y_\alpha+(1-|y|^2)\delta_{\alpha\beta})$$

一般に

$$\begin{pmatrix} y_1y_1 & y_1y_2 & \cdots & y_1y_n \\ y_2y_1 & y_2y_2 & \cdots & y_2y_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_ny_1 & y_ny_2 & \cdots & y_ny_n \end{pmatrix}+c\times\text{単位行列}$$

の行列式が, $c^n+c^{n-1}|y|^2$ ($|y|^2=\sum_\alpha y_\alpha^2$) で与えられることは容易に証明できる. 今の場合, $c=1-|y|^2$ であるから 行列式は $(1-|y|^2)^{n-1}$ であり, 特に 0 ではない. よって微分 $d\pi_p$ は同型である.

略解 20. 座標 $U_0 = \{x \neq 0\}$ では,

$$f([1:y]) = [1 : a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0]$$

となり, 像も U_0 に入るが, $\varphi_0 \circ f \circ (\varphi_0)^{-1}$ の微分が消えるのは $a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0$ の微分が 0 になる点である. あとは $[0:1]$ で微分が消えているかどうか調べればよい.

$$f([x:1]) = [x^n : a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0 x^n]$$

である. $a_n \neq 0$ なので x が十分小さければ, $a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0 x^n \neq 0$ となり, 座標 φ_1 を使って $\frac{x^n}{a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0 x^n}$ の微分を計算すると, $n \neq 1$ であれば, $x = 0$ で微分が消えている. したがって $p = [0:1]$ でも $df_p = 0$ である. $n = 1$ であれば, $x = 0$ では微分は消えていない. また, その場合は U_0 でも微分は消えていない.

略解 21. (1) $\mathcal{O}$ が開基であることを示すためには、V を M の開集合とするとき、V が $\mathcal{O}$ に含まれる開集合の和で表わされることを示せばよい。座標近傍系 $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ に対して $\{U_i\}_{i \in I}$ は M の開被覆であったから、$V = \bigcup_{i \in I}(V \cap U_i)$ が成りたつ。また、$V \cap U_i$ は U_i に含まれる開集合であり、$\mathcal{O}$ の元である。よって $\mathcal{O}$ が開基であることが分かった。

(2) 必要条件であることは, C^∞ 写像の合成が再び C^∞ 級であることから従う.

充分条件であることを示す. まず, F は連続写像であることを示す. ユークリッド空間内の球 $B_r(p) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x - p| < r\}$ の全体が, $\mathbf{R}^n$ の位相空間の開基であることから, (1) の開基の開集合 V の条件に, さらに $U' = \varphi(U)$ に閉包まで込めて入っている球 $B_r(p)$ の φ による逆像 $V = \varphi^{-1}(B_r(p))$ であるという条件を付け加えても, やはり開基になっている. このとき $B_r(p)$ 上で正, その外で 0 となるような $\mathbf{R}^n$ 上の C^∞ 級関数 f を取り, $f \circ \varphi$ を U の外で 0 とおくことにより, M 上の C^∞ 級関数を定め, g とする. 条件から $g \circ F$ は, M 上の C^∞ 級関数であり, したがって特に連続関数である. $\{x \in M \mid g \circ F(x) \neq 0\}$ は, M の開集合である. ところが, これは, $F^{-1}(V)$ に他ならない. よって, F は連続である.

次に, F が C^∞ 級であることを示す. $\varphi_=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ を開集合 U 上で定義された N の座標とするときに, (必要ならば U を小さく取り直して,) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ は N 全体で定義された関数 (同じ記号で表わす) の制限であるとして構わない. したがって仮定から $\varphi_i \circ F$ は M 上の C^∞ 級関数である. M 上の C^∞ 級関数の定義に戻れば, これは座標系 (V, ψ) を取って $(\varphi \circ F)|_V \circ \psi^{-1}$ が C^∞ 級である. F は連続であるから, $F(V) \subset U$ となるように V を小さく取り直して構わない. すると, これは, F が C^∞ 級であることに他ならない.