

略解 36. φ^- を南極からの直交射影とすると, 略解 3 により

$$\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{y_1}{|y|^2}, \dots, \frac{y_n}{|y|^2} \right), \quad |y|^2 = \sum y_\alpha^2$$

であった. この右辺を (w_1, \dots, w_n) とおくと,

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial w_\beta}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial w_\beta} = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{|y|^2} - \frac{2y_\beta y_\alpha}{|y|^4} \right) \frac{\partial}{\partial w_\beta} = \sum_{\beta=1}^n (\delta_{\alpha\beta} |w|^2 - 2w_\beta w_\alpha) \frac{\partial}{\partial w_\beta}$$

となり, これは $w = 0$ まで滑らかになっていることを意味する. また, $w = 0$ ではこれは 0 になっているから, ベクトル場が消えているのは南極の一点である. また,

$$\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \left(y_\alpha |w|^2 - 2 \sum_{\beta=1}^n 2y_\alpha w_\beta w_\alpha \right) \frac{\partial}{\partial w_\beta} = - \sum_{\beta=1}^n w_\beta \frac{\partial}{\partial w_\beta}$$

であり, これも $w = 0$ まで滑らかになっている.

注. n が偶数のとき, S^n 上のいかなるベクトル場 X も, それが 0 になる点の数 (しかるべき数え方をする) は 2 個になることが知られている. n が奇数のときは 0 個になる. (Poincaré-Hopf の定理)

略解 37. $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の座標は次のように取ることができる. 開集合 $V \subset \mathbb{R}^2$ であって, π の V への制限は全単射であり, $U = \pi(V)$ とするとき座標 $\varphi: U \rightarrow V$ は, π の逆写像である. この座標に π を制限すると, \mathbb{R}^2 上のベクトル場 \tilde{X} と座標ベクトル場 $\partial/\partial x$ は同じである. (正確には $d\pi$ で写りあう.) 上のような座標二つに関する座標変換で, $\partial/\partial x$ がそれ自身にうつることは, (共通部分の連結集合上で) 座標変換が定数を足していることに他ならないことから分かる.

もしくは, T^2 上の C^∞ 級関数は, \mathbb{R}^2 上の C^∞ 級関数で, $f(x+m, y+n) = f(x, y)$ ($(m, n) \in \mathbb{Z}^2$) を満たすものであることに注意して, $\frac{\partial}{\partial x} f$ が再びこの性質を満たすことからチェックできる.

注. 上と同じく T^2 上のどんなベクトル場も 0 となる点の数は 0 個である.

略解 38. 略

略解 39. 任意の C^∞ 級関数 f に左辺を作用させてみれば, 0 であることが分かる.

略解 40. (1) N 上の C^∞ 級関数と M の点 p に対して

$$(D_X \circ F^*g)(p) = X_p(g \circ F) = dF_p(X_p)g, \quad Y_{F(p)}g = (D_Yg)(F(p)) = (F^* \circ D_Yg)(p)$$

が成り立つ. したがって $D_X \circ F^* = F^* \circ D_Y$ と $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ は同値である.

(2) リーブラケットの定義により $D_{[X_1, X_2]} = D_{X_1} \circ D_{X_2} - D_{X_2} \circ D_{X_1}$ が成り立つから,

$$\begin{aligned} D_{[X_1, X_2]} \circ F^* &= (D_{X_1} \circ D_{X_2} - D_{X_2} \circ D_{X_1}) \circ F^* = D_{X_1} \circ F^* \circ D_{Y_2} - D_{X_2} \circ F^* \circ D_{Y_1} \\ &= F^* (D_{Y_1} \circ D_{Y_2} - D_{Y_2} \circ D_{Y_1}) = F^* \circ D_{[Y_1, Y_2]} \end{aligned}$$

となって結論が従う.

略解 41. (1) 座標をとって C^∞ 級であることを確かめればよいが, φ の方は $F^{-1} \circ \varphi: \mathbf{R} \cong M \rightarrow M \cong \mathbf{R}$ が C^∞ 級であることを意味する. $F^{-1} \circ \varphi(x) = x^3$ だから, C^∞ 級は正しい. 一方, φ^{-1} の方は, $\varphi^{-1} \circ F: \mathbf{R} \cong M \rightarrow M \cong \mathbf{R}$ であるが, これは $x \mapsto x^{1/3}$ だから C^∞ 級ではない.

(2) 上で定めた N の座標を y とする. つまり $\varphi(x)$ を座標 y で表すと, $y = x^3$ である. したがって M, N という多様体の代わりに, $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \varphi(x) = x^3$ を考えて, X と φ -関係にあるベクトル場 Y がないことをチェックすればよい. $\varphi'(x) = 3x^2$ であるから, $d\varphi_x(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{dy}{dx} \frac{\partial}{\partial y} = 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}$ である. ところが, $3x^2 = 3y^{2/3}$ は y の C^∞ 級関数ではない. よって, ベクトル場 Y は C^∞ 級にはとれない.