略解 42. $t=0$においてxを通ることは定義から明らかである。$t=0$での微分が、$\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$で与えられることを確かめる。任意の$C^\infty$級関数$f$に対して$\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+ta)$が成りたつので主張が示される

略解 43. 任意の$x \in \mathbf{R}^n$に対して、$\frac{d}{dt}\exp(tA)x = A\exp(tA)x$で、これは$\tilde{A} = \{Ax\}_{x\in\mathbf{R}^n}$の積分曲線 を与える。

略解 44. **問題 36** の$\widetilde{X}$のとき: Xの定義から座標$\varphi^+ = (y_1, \ldots, y_n)$で表わすと, 積分曲線は$y_\beta(t) = y_\beta(0) + t\delta_{\alpha\beta}$である. また, 北極$(0,\ldots,0,1)$を出発する積分曲線は, 北極にずっと留まっている. したがって$\widetilde{X}$は完備である.

問題 36 の$\widetilde{Y}$のとき: 積分曲線を座標で表わすと$y_\beta(t) = e^t y_\beta(0)$である. また上と同様に北極$(0,\ldots,0,1)$を出発する積分曲線は, 北極にずっと留まっている. したがって$\widetilde{X}$は完備である.

問題 37 のXのとき: $(x(t), y(t)) = (x(0)+t, y(0))$という$\mathbf{R}^2$の直線を, 射影$\pi\colon \mathbf{R}^2 \to T^2$で落とした曲線が積分曲線である. 特に完備である.

略解 45. (1) $c(t)$がベクトル場Xの積分曲線であるとするとき, $F(c(t))$を考える. $\frac{d}{dt}F(c(t)) = dF_{c(t)}\frac{d}{dt}c(t) = dF_{c(t)}X_{c(t)} = F_*(X)_{F(c(t))}$であるから, $F(c(t))$は$F_*(X)$の積分曲線である. そして初期値は$F(c(0))$である. $c(0)=p$としたとき, $\varphi_t(p) = c(t)$がφ_tの定義だから, ψ_tを$F_*(X)$の定める 1 パラメータ変換群として, $\psi_t(F(p)) = F(c(t)) = F\circ\varphi_t(p)$である. よって$F\circ\varphi_t = \psi_t \circ F$であり, 結論が従う.

(2) まず, (1) と$\varphi_s\circ\varphi_t\circ\varphi_{-s} = \varphi_t$から$(\varphi_s)_*X = X$が任意の$s$について成立することに注意する. (もちろん定義に戻って直接チェックしてもよい.) したがって$(\varphi_s)_*[X,Y] = [X,(\varphi_s)_*Y]$が成り立つ. よって$[X,Y]=0$と, すべての$s$について$[X,(\varphi_s)_*Y]=0$が成り立つことは同値である.

さて, $[X,Y] = \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_{-t})_*Y - Y}{t}$である. したがって$(\varphi_{-t})_*(Y) = Y$ならば, $[X,Y]=0$である. 逆に$[X,Y]=0$とすると, 上で注意したように$[X,(\varphi_s)_*Y]=0$が成り立つ. したがって, $0 = \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_{-t})_*((\varphi_s)_*Y) - (\varphi_s)_*Y}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_{s-t})_*Y - (\varphi_s)_*Y}{t}$である. この極限の式は, (座標を取って接空間を数ベクトル空間とみなせば,) $\frac{d}{ds}(\varphi_s)_*(Y) = 0$を意味し, よって$(\varphi_s)_*(Y)$は, sによらずに定ベクトルで, したがってYに等しい.

さらに, $(\varphi_t)_*(Y) = Y$の必要十分条件は, 両辺に対応する 1 パラメータ変換群が等しいことであり, したがって (1) より$\varphi_{-t}\circ\psi_s\circ\varphi_t = \psi_s$である.

略解 46. (1) $(g,h)\mapsto gh$と$g\mapsto g^{-1}$がC^∞級であることは、行列の積の定義と逆行列の公式 (クラメルの公式) から従う。

(2) $\tilde{A}$がC^∞級であることは、 (1) から従う。

(3) $\varphi(g,t) = g\exp(tA)$は、$\frac{d}{dt}g\exp(tA) = gA\exp(tA)$を満たし、$\tilde{A}$の積分曲線をなす。

(4) $GL(n,\mathbf{R})$において、行列単位は座標系をなす。$\tilde{A} = \sum_{1\le i,j\le n}\tilde{A}(g)_{ij}\partial/\partial g_{ij}$と局所座標をとって計算すれば$\tilde{A}$の定義から$\tilde{A}_{ij} = (gA)_{ij}$となっている。ベクトル場の交換子の計算により$[\tilde{A},\tilde{B}](g)_{ij} = (g[A,B])_{ij}$が確かめられる。よって、主張が示される。