

略解 47. $U_{\pm} = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$ とおくと, U_+ 上で, 略解 2 でした様に, x_1 を y_1, \dots, y_n で表すと,

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_1}{\partial y_i} dy_i \\ &= \frac{2}{(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)^2} \left\{ (1 - y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) dy_1 - 2 \sum_{i=2}^n y_1 y_i dy_i \right\} \end{aligned}$$

となる. U_- 上でも同じ形の式になる.

略解 48. (1) 略解 37 と同様に S^1 の座標近傍系 $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ を φ_i が π の局所的な逆となるようにとる. φ_i に対応する一次微分形式を dx_i とかく. 明らかに $\frac{d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})}{dx_1} = 1$ となるから, すべての $p \in U_1 \cap U_2$ に対して $(dx_1)_p = (dx_2)_p$ となり, dx_1 と dx_2 を張り合わせて S^1 上の微分形式を作ることができる. これが α の条件を満たすことは明らかである. また, 一意性は π が全射であること, \mathbb{R} の各点で接空間の同型を誘導することからわかる.

(2) 略

(3) $df = dx$ となる C^∞ 関数 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ が存在したと仮定する. このとき $d(f \circ \pi) = dx$ となり, これは $f \circ \pi(x) = x + c$ (c は定数) となることを意味するが, あきらかにこのような f は存在しない. よって矛盾である.

略解 49. (1) $\rho(p) = 1$ かつ $\rho|_{M \setminus W} = 0$ となる C^∞ 級関数 ρ をとれば, ρX は恒等的に 0 であり, このとき $\alpha(\rho X)$ が恒等的に 0 になることは容易に分かる. さらに,

$$\alpha(X)(p) = (\rho \cdot \alpha(X))(p) = \alpha(\rho X)(p) = 0$$

となるのでよい.

(2) $V \in T_p M$ に対して, M 上のベクトル場 \tilde{V} で $\tilde{V}_p = V$ となるものをとる. (このような \tilde{V} を構成するには, 局所的には座標をとって \mathbb{R}^n にうつしてつくり, これを M 全体のベクトル場に拡張すればよい.) $\alpha_p(V) := \alpha(\tilde{V})(p)$ とおく. この定義が \tilde{V} のとり方によらないことは次のようにして示せる. $\tilde{V}_p = 0$ ならば $\alpha(\tilde{V})(p) = 0$ であることをいえば十分である. p のまわりの座標近傍 (x_1, \dots, x_n) をとり, ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (の十分小さい近傍への制限) の M 全体への拡張を X_i とかくと, p の十分小さい近傍 W_1 と M 上の C^∞ 級関数 f_i で, $\tilde{V}|_{W_1} = (\sum_{i=1}^n f_i X_i)|_{W_1}$ となるものが存在し, $f_i(p) = 0$ となる. (1) から, $\alpha(\tilde{V} - \sum_{i=1}^n f_i X_i)(p) = 0$ となることがわかり, 従って,

$$\alpha(\tilde{V})(p) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n f_i X_i\right)(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) \alpha(X_i)(p) = 0$$

となり, $\alpha_p(V)$ は well-defined である. 写像 $T_p M \ni V \mapsto \alpha_p(V) \in \mathbb{R}$ が線形であることは明らかで, 一次形式 $M \ni p \mapsto \alpha_p \in T_p M^*$ が微分可能であることは上で定義した X_i を使えばわかる. $(\alpha(X))(p) = \alpha_p(X_p)$ となることはつくり方から明らか.

略解 50. (1) 一般に, C^∞ 級関数 f, g とベクトル場 X, Y に対して, $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)$ が成り立つ. (これは左辺を微分作用素だと思って C^∞ 級関数に作用させて具体的に計算すればわかる.) この等式を使えば, $(L_X\alpha)(fY + gZ) = f(L_X\alpha)(Y) + g(L_X\alpha)(Z)$ が成り立つことがわかるので, 問 49 より, $L_X\alpha$ が一次微分形式であることがわかる.

(2) Y を M 上のベクトル場とする.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^* \alpha)_p - \alpha_p}{t}(Y_p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^* \alpha)(Y)(p) - \alpha(Y)(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^*(\alpha(\varphi_{t*} Y)))(p) - \varphi_t^*(\alpha Y)(p) + \varphi_t^*(\alpha Y)(p) - \alpha(Y)(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t^* \left(\frac{\alpha(\varphi_{t*} Y)(p) - \alpha Y(p)}{t} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^*(\alpha Y)(p) - \alpha Y(p)}{t} \\ &= -\alpha([X, Y])(p) + X(\alpha(Y))(p) \end{aligned}$$

となる. ここで, 二つめの変形には $(\varphi_t^* \alpha)(Y) = \varphi_t^*(\alpha(\varphi_{t*} Y))$ (これは容易に確かめられる) を, 五つめの変形には $(t, p) \mapsto \alpha(\varphi_{t*} Y)(p)$ が (t, p) の C^∞ 級関数であること, $L_X(Y) = [X, Y]$ と $L_X(\alpha Y) = X(\alpha Y)$ ([松本, 補題 17a]) を使った. すべての M 上のベクトル場 Y に対してこの等式が成り立つので,

$$(L_X\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y])$$

が成り立つ.

略解 51. (1) 仮定から, $f = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $g = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ となる. $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ とかくと,

$$\begin{aligned} \int_c \alpha &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(c(t)) \frac{dc_1}{dt}(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(c(t)) \frac{dc_2}{dt}(t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d(\Phi \circ c)}{dt}(t) dt \\ &= \Phi \circ c(1) - \Phi \circ c(0) = \Phi(Q) - \Phi(P) \end{aligned}$$

(2) U が (弧状) 連結と仮定して示せばよい. U の点 P_0 を一つ固定する. $P \in U$ に対して, $c(0) = P_0$ かつ $c(1) = P$ なる区分的に C^∞ 級な曲線 $c: [0, 1] \rightarrow U$ をとり, $\Phi(P) := \int_c \alpha$ と定める. 仮定から, これは well-defined である. Φ が C^∞ 級で $d\Phi = \alpha$ となることをいうためには, 任意の $P \in U$ に対して,

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{|\Phi(Q) - (\Phi(P) + f(P)(q_1 - p_1) + g(P)(q_2 - p_2))|}{\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}} = 0$$

となることをいえばよい. $(P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)) \in \epsilon > 0$ とする. $\delta > 0$ を十分小さくとって, $B_\delta(P) \subseteq U$, $Q \in B_\delta(P)$ ならば, $|f(Q) - f(P)| < \epsilon$ かつ $|g(Q) - g(P)| < \epsilon$ となる

ようにする. このとき $c: [0, 1] \rightarrow U$ を $c(t) = P + t(Q - P)$ と定めると,

$$\begin{aligned} & |\Phi(Q) - (\Phi(P) + f(P)(q_1 - p_1) + g(P)(q_2 - p_2))| \\ &= \left| \int_c \alpha - (f(P)(q_1 - p_1) + g(P)(q_2 - p_2)) \right| \\ &\leq \int_0^1 (|f(P + t(Q - P)) - f(P)||q_1 - p_1| + |g(P + t(Q - P)) - g(P)||q_2 - p_2|) dt \\ &\leq 2\epsilon \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} \end{aligned}$$

となり, 上の主張が成り立つことがわかる.