略解 52.

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

は, $d\omega_2 = (\operatorname{div} F)\, dx \wedge dy \wedge dz$ として現れる.

$$\operatorname{curl} F = \nabla \times F = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$$

であるから, $d\omega_1$ の $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ 成分を取れば, $\operatorname{curl} F$ が現れる.

略解 53. (1) $\omega = d\theta$
(2) 直接計算してもチェックできるが、以下のように示すことができる。極座標 r, θ は θ が一意に定まらないので $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ の座標ではないが、θ の範囲を限定すれば、座標になる。したがって、極座標のもとで $d\omega = 0$ を証明すれば十分である。しかし、これは $d\omega = dd\theta = 0$ と示される。
(3) $\omega = dF$ とすると, (1) より, F と θ の差は定数である. ところが, θ は原点の回りを一周すると 2π ずれてしまうので, $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の関数としては well-defined ではない. よって, このような F は存在しない.

略解 54. 2 次微分形式同士の外積が可換である事と $dx_i \wedge dx_i = 0$ に注意すれば, 容易な計算で $\omega^n = n!\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$ となる事が確かめられる.

略解 55. (1) S^2 は 2 次元多様体であるから全ての 3 次微分形式は 0 でなければならない. 故に $i^*(dx \wedge dy \wedge dz) = 0$ である.
(2) S^2 上の関数 $i^*(x^2 + y^2 + z^2)$ は恒等的に 1 であるから, 外微分を取る事によって, 各点 $p = (x, y, z) \in S^2$ において

$$x\, i^*dx + y\, i^*dy + z\, i^*dz = 0$$

となる. ここでもし $z = 0$ ならば, 上式により i^*dx と i^*dy は線型従属となり, 故に $i^*(dx \wedge dy) = 0$ となる. もし $z \neq 0$ ならば, 上式により i^*dz は i^*dx と i^*dy の線型結合で表される. $i^* : T_p^*\mathbf{R}^3 \to T_pS^2$ は埋め込み写像 i の微分の転置であるから全射で, 故に i^*dx と i^*dy は $T_p^*S^2$ の基底をなす事が分かる. よって $i^*(dx \wedge dy) \neq 0$ である.

略解 56. (1) 容易なので省略する.
(2) $L_X L_Y \alpha$ を計算すると次のようになる：

$$\begin{aligned}
(L_X L_Y \alpha)(X_1, \ldots, X_k) &= X((L_Y\alpha)(X_1, \ldots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} (L_Y\alpha)(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_k) \\
&= XY(\alpha(X_1, \ldots, X_k)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k} X(\alpha(X_1, \ldots, [Y, X_i], \ldots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} Y(\alpha(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_k)) \\
&\quad + \sum_{i \neq j} \alpha(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, [Y, X_j], \ldots, X_k) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} \alpha(X_1, \ldots, [Y, [X, X_i]], \ldots, X_k).
\end{aligned}$$

上式最右辺の 2 行目にある項と 3 行目にある項は X と Y について対称的であり, $L_Y L_X \alpha$ を計算しても同じものが出てくる事が分かる. 従ってこの部分は打ち消しあう. 後は Jacobi の恒等式 $[[X,Y],X_i]=[X,[Y,X_i]]-[Y,[X,X_i]]$ に注意すれば, 求める等式が得られる.
(3-4) X の定める局所 1 パラメータ変換群を φ_t とする. このとき各点 $p\in M$ において

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\alpha)_p(X_1,\dots,X_k)\bigg|_{t=0}=(L_X\alpha)_p(X_1,\dots,X_k)$$

が成立する. 実際 $k=2$ のときに左辺を計算すると, Leibniz 則を応用する事で

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\alpha)_p(X_1,X_2)\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\alpha_{\varphi_t(p)}((\varphi_t)_*X_1,(\varphi_t)_*X_2)\bigg|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}\alpha_{\varphi_t(p)}(X_1,X_2)\bigg|_{t=0}+\frac{d}{dt}\alpha_p((\varphi_t)_*X_1,X_2)\bigg|_{t=0}+\frac{d}{dt}\alpha_p(X_1,(\varphi_t)_*X_2)\bigg|_{t=0}\\ &= X_p(\alpha(X_1,X_2))-\alpha_p(L_XX_1,X_2)-\alpha_p(X_1,L_XX_2)\end{aligned}$$

となる. $L_XX_i=[X,X_i]$ であるから, これは確かに $(L_X\alpha)_p(X_1,X_2)$ を与える. 一般の k でも同様に確かめられる.
今示した式を用いれば, (3) と (4) の証明は容易である. 実際

$$\varphi_t^*(\alpha\wedge\beta)=(\varphi_t^*\alpha)\wedge(\varphi_t^*\beta),$$
$$d\varphi_t^*\alpha=\varphi_t^*d\alpha$$

の両辺を $t=0$ で微分する事でそれぞれ (3), (4) が得られる. (1 行目の式の右辺を微分するとき Leibniz 則に注意する事.)

略解 57. (1) α が 0 次微分形式, すなわち関数の時は $i(X)\alpha=0$ であるから問題の式は正しい. β が関数の時も同様にして確かめられる. そこで α,β 共に次数が正であるとする. まず前問の Lie 微分と異なり, 内部積 $i(X)\alpha$ が点 $p\in M$ で定める T_pM 上の交代形式 $[i(X)\alpha]_p$ は, X_p と α_p のみで決まる事に注意する. 従って, (1) は α,β がそれぞれ 1 次微分形式の外積の形をしているときに確かめれば十分である. そこで $\alpha_1,\dots,\alpha_k,\ \beta_1,\dots,\beta_l$ を 1 次微分形式とし, $\alpha=\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k,\ \beta=\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_l$ とする. このときベクトル場 $X_1,X_2,\dots,X_k$ に対し

$$\alpha(X_1,\dots,X_k)=\det\left(\alpha_i(X_j)\right)_{1\le i,j\le k}$$

となる事を小テストでやった. この式の右辺の行列式を第 1 列で展開すると,

$$\alpha(X_1,\dots,X_k)=\sum_{i=1}^k(-1)^{i-1}\alpha_i(X_1)(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_{i-1}\wedge\alpha_{i+1}\wedge\cdots\wedge\alpha_k)(X_2,\dots,X_k)$$

が得られる. 右辺に現れる α_i だけ除いて外積を取った微分形式を $\alpha_{(i)}$ で表す事にすると, これは

$$i(X)\alpha=\sum_{i=1}^k(-1)^{i-1}\alpha_i(X)\,\alpha_{(i)}$$

となる事を意味する．この公式を α ではなく $\alpha\wedge\beta$ に適用すれば,

$$\begin{aligned} i(X)(\alpha\wedge\beta) &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\alpha_i(X)\,\alpha_{(i)}\wedge\beta + \sum_{i=1}^{l}(-1)^{k+i-1}\beta_i(X)\,\alpha\wedge\beta_{(i)} \\ &= (i(X)\alpha)\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge(i(X)\beta) \end{aligned}$$

となり, (1) が示された.
(2) 右辺を素直に計算すれば良い．容易なので省略する．
(3) α が 0 次微分形式, すなわち関数の場合は, $L_X\alpha = X(\alpha)$ であり, また

$$i(X)d\alpha - di(X)\alpha = i(X)d\alpha = X(\alpha)$$

となる．故に 0 次微分形式に対しては問題の式は正しい．次に α の次数を $k>0$ とする．このとき

$$\begin{aligned} (i(X)d\alpha)(X_1,\ldots,X_k) &= d\alpha(X,X_1,\ldots,X_k) \\ &= X(\alpha(X_1,\ldots,X_k)) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+2}X_i(\alpha(X,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_k)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{1+j+1}\alpha([X,X_j],\hat{X},\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_k) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{(i+1)+(j+1)}\alpha([X_i,X_j],X,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_k) \\ &= (L_X\alpha)(X_1,\ldots,X_k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i}X_i\left((i(X)\alpha)(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_k)\right) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}(i(X)\alpha)([X_i,X_j],\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_k) \\ &= (L_X\alpha)(X_1,\ldots,X_k) - (di(X)\alpha)(X_1,\ldots,X_k) \end{aligned}$$

となり, 主張が示された.