幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2008年10月22日 (水)

問題 12. チェイン複体の短完全全列からコホモロジー の長完全全列が導かれることの証明を完成させせよ.

問題 13. $\mathbf{R}^2$ から k 個の相異なる点を除いた補集合を M_k とするとき,

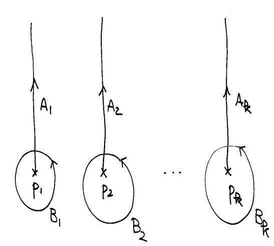
$$H^p(M_k) = \begin{cases} \mathbf{R} & p = 0 \text{ のとき} \\ \mathbf{R}^k & p = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となることを証明せよ.

より詳しく, 下図のように A_i, B_i を取ると,

$$H^1(M_k) \ni [\alpha] \longmapsto \int_{B_i} \alpha \qquad (i = 1, \dots, k) \in \mathbf{R}^k$$

が同型写像となることを証明せよ.



問題 14. (1) 下図の M のコホモロジー群が

$$H^k(M) = \begin{cases} \mathbf{R}^2 & k = 1 \text{ のとき} \\ \mathbf{R} & k = 0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となることを示せ. より詳しく, 下図のように γ_1, γ_2, γ_3 を取ると,

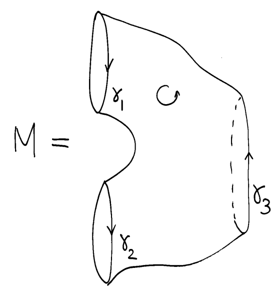
$$H^1(M) \ni [\alpha] \longmapsto \left(a_i \overset{\text{def.}}{=} \int_{\gamma_i} \alpha \right)_{i=1,2,3} \in \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$$

が同型写像となることを証明せよ.

(2) 下図の Σ_g のコホモロジー群が

$$H^k(\Sigma_g) = \begin{cases} \mathbf{R}^{2g} & k=1\text{のとき} \\ \mathbf{R} & k=0,2\text{のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となることを示せ.



コホモロジーの係数 ‘, $\mathbf{R}$’ は省略することにする.

略解 12. 略

略解 13. $M_k = \mathbf{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ とし, p_k の回りの十分小さな開円板 U_k を, 他の点とは交わらないように取る. $M_{k-1} = M_k \cup U_k$ である. $M_k \cap U_k = U_k \setminus \{p_k\}$ であるが, これは S^1 を変形レトラクトに含む. Mayer-Vietoris 完全列により

$$\begin{tikzcd}
H^2(M_{k-1}) \arrow[r] & H^2(M_k) \oplus H^2(U_k) \arrow[r] & H^2(S^1) \\
H^1(M_{k-1}) \arrow[r] & H^1(M_k) \oplus H^1(U_k) \arrow[r] & H^1(S^1) \arrow[ull, "d^*" description] \\
H^0(M_{k-1}) \arrow[r] & H^0(M_k) \oplus H^0(U_k) \arrow[r, "\varphi"'] & H^0(S^1) \arrow[ull, "d^*" description]
\end{tikzcd}$$

となる. $H^i(U_k) = \mathbf{R}$ ($i = 0$ のとき) $= 0$ (その他のとき), $H^i(S^1) = \mathbf{R}$ ($i = 0, 1$ のとき) $= 0$ (その他のとき), $H^i(M_0) = \mathbf{R}$ ($i = 0$ のとき) $= 0$ (その他のとき), に注意すると, まず一番上の行のコホモロジーがすべて 0 であることが, 帰納法で分かる. 次に, $\varphi\colon H^0(M_k) \oplus H^0(U_k) \to H^0(S^1)$ は全射である. (何故か?) したがって, $d^*\colon H^0(S^1) \to H^1(M_{k-1})$ は 0 写像である. したがって

$$0 \to H^1(M_{k-1}) \to H^1(M_k) \to H^1(S^1) \to 0$$

という短完全列を得るので, 帰納法によって $H^1(M_k)$ は, $\mathbf{R}^k$ となる.

より詳しく, 上の短完全列において, $H^1(S^1) = H^1(U_k \setminus \{p_k\})$ は, B_k の上で積分することにより $\mathbf{R}$ と同型である. これにより帰納法によって後半の主張が従う.

略解 14. (1) M を S^2 から三枚の円板 D_1, D_2, D_3 を除いたものと思う. $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ を含む開集合 U と, M を含む開集合 V で S^2 を覆う. V は, M とホモトピックになるように取っておく. U は, 三つの $\mathbb{R}^3$ の非交和とホモトピックであり, 特に $H^k(U) \cong \mathbf{R}^3$ $(k = 0)$, $\cong 0$ (k その他) である. また, $U \cap V$ は, 三つの S^1 の非交和とホモトピックであり, 特に $H^k(U \cap V) \cong \mathbf{R}^3$ $(k = 0, 1)$, $\cong 0$ (k その他) である. そこで, Mayer-Vietoris 完全列を考える.

$$\begin{tikzcd}
H^2(S^2) \arrow[r] & H^2(M) \arrow[r] & 0 \\
0 = H^1(S^2) \arrow[r] & H^1(M) \arrow[r, "\varphi"'] & H^1(U \cap V) \cong \mathbf{R}^3 \arrow[ull, "d^*" description]
\end{tikzcd}$$

よって, $H^1(M) \cong \operatorname{Ker} d^*$, $H^2(M) \cong \operatorname{Coker} d^*$ である. Mayer-Vietories 完全系列における d^* の定義と Stokes の定理を用いて $d^*(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 + a_3$ であることを示して (詳細略), 結論を得る. また φ が, 詳しくのあとに書かれている写像であることも明らかである.

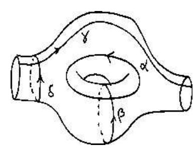
(2) 簡単のため, $g=1$ とする．一般の場合は帰納法で示す．M を二つ貼り合わせて, Σ_1 から二つの円板 D_1, D_2 を抜いたものを作る．このとき Mayer-Vietoris 完全列を考える．

$$\begin{tikzcd}
H^2(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
H^1(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \arrow[r] & H^1(M) \oplus H^1(M) \arrow[r, "\varphi_1"'] & H^1(S^1) \oplus H^1(S^1) \arrow[ull, "d_1^*"] \\
H^0(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \arrow[r] & H^0(M) \oplus H^0(M) \arrow[r, "\varphi_0"'] & H^0(S^1) \oplus H^0(S^1) \arrow[ull, "d_0^*"]
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Coker}\,\varphi_1 = 0$, $\mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cong \mathbf{R}^2$, $\mathrm{Coker}\,\varphi_0 \cong \mathbf{R}$ をチェックして,

$$H^0(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \cong \mathbf{R}, \qquad H^1(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \cong \mathbf{R}^3, \qquad H^2(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \cong 0$$

が示される．下図の α, β, δ 上の積分が H^1 と $\mathbf{R}^3$ の同型を与える．(詳細略)



次に D_1, D_2 を貼って, 再び Mayer-Vietoris 完全列を考える．

$$\begin{tikzcd}
H^2(\Sigma_1) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
H^1(\Sigma_1) \arrow[r] & H^1(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \arrow[r, "\varphi_1"'] & H^1(S^1) \oplus H^1(S^1) \arrow[ull, "d_1^*"] \\
H^0(\Sigma_1) \arrow[r] & H^0(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \oplus H^0(D_1) \oplus H^0(D_2) \arrow[r, "\varphi_0"'] & H^0(S^1) \oplus H^0(S^1) \arrow[ull, "d_0^*"]
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Coker}\,\varphi_1 \cong \mathbf{R}$, $\mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cong \mathbf{R}^2$, $\mathrm{Coker}\,\varphi_0 = 0$ をチェックして (詳細略), 結論を得る．