幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2008年10月29日 (水)

問題 15. $\mathbf{R}^2$ から原点 0 を除いた $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ のコンパクト台のコホモロジー $H_c^p(M)$ を求めよ. そのとき次元を計算するだけでなく, 積分による基底を与えよ.

問題 16. コンパクト台の Mayer-Vietoris 完全列を用いて, メビウスの帯 M の $H_c^*(M)$ を計算せよ. ただしメビウスの帯とは, $[0,1] \times (-1,1)$ を, $(0,x) \sim (1,-x)$ から生成される同値関係で貼り合わせてできる多様体である. 一方, $H^*(M)$ は, M が S^1 とホモトピックであることから, $H^*(S^1)$ と同型になる. しかし、$H_c^*(M)$ は $H_c^*(S^1)$ と同型になっていないことをチェックせよ.

問題 17. (1) **問題 13** の M_k のコンパクト台のコホモロジーが

$$H_c^p(M_k) = \begin{cases} \mathbf{R} & p = 2 \text{ のとき} \\ \mathbf{R}^k & p = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

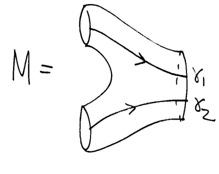
となることを証明せよ.

より詳しく, 先週の図のように A_i, B_i を取ると,

$$H_c^1(M_k) \ni [\alpha] \longmapsto \int_{A_i} \alpha \qquad (i = 1, \ldots, k) \in \mathbf{R}^k$$

が同型写像となることを証明せよ.

(2) 先週の**問題 14** の M のコンパクト台のコホモロジー $H_c^*(M)$ を求めよ. M の中に曲線 γ_1, γ_2 を下図のように取ると, そこでの積分により $H_c^1(M)$ が $\mathbf{R}^2$ と同型になることを示せ. さらにコンパクト台の Mayer-Vietoris 完全列を用いて $H_c^*(\Sigma_g)$ を求めよ.



問題 18. 次の five lemma を証明せよ.
次のアーベル群の可換図式を考える.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\longrightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E & \longrightarrow \\
 & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & {\scriptstyle\delta}\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & \\
\longrightarrow & A' & \xrightarrow[f_1']{} & B' & \xrightarrow[f_2']{} & C' & \xrightarrow[f_3']{} & D' & \xrightarrow[f_4']{} & E' & \longrightarrow
\end{array}
$$

横方向には完全であるとし, 縦方向には α, β, δ, ε は同型写像であるとする. このとき, γ も同型であることを証明せよ.

コホモロジーの係数 ‘, $\mathbf{R}$’ は省略することにする.

略解 15. M は $S^1 \times \mathbf{R}$ と微分同相である. したがって, コンパクト台についてのポアンカレの補題により

$$H_c^k(S^1) \underset{e_*}{\overset{\pi_*}{\leftrightarrows}} H_c^{k+1}(S^1 \times \mathbf{R})$$

が互いに逆写像になる. $H_c^k(S^1) = H^k(S^1) = \mathbf{R}$ ($k = 0, 1$ のとき), $= 0$ ($k \neq 0, 1$ のとき) であるから, $H_c^k(S^1 \times \mathbf{R}) = \mathbf{R}$ ($k = 1, 2$ のとき), $= 0$ ($k \neq 1, 2$ のとき) を得る.

さらに $H^0(S^1) \cong \mathbf{R}$ は $H^0(S^1) \ni [\alpha] \mapsto \alpha(0)$ (0 は S^1 の点) で与えられ, $H^1(S^1) \cong \mathbf{R}$ は $H^1(S^1) \ni [\beta] \mapsto \int_{S^1} \beta$ で与えられたことに注意すると,

$$H_c^1(S^1 \times \mathbf{R}) \xrightarrow{\pi_*} H^0(S^1) \xrightarrow{0\text{ で値をとる}} \mathbf{R}, \qquad H_c^2(S^1 \times \mathbf{R}) \xrightarrow{\pi_*} H^1(S^1) \xrightarrow{\int_{S^1} \bullet} \mathbf{R}$$

の合成が同型写像となるが, より具体的には, H_c^1 については $\{0\} \times \mathbf{R}$ (M にもどすと, 原点を出発する半直線) 上での積分

$$H_c^1(S^1 \times \mathbf{R}) \ni [\alpha] \longmapsto \int_{\{0\} \times \mathbf{R}} \alpha \in \mathbf{R}$$

で与えられ, H_c^2 については同様に $S^1 \times \mathbf{R}$ 上の積分で与えられる.

略解 16. 区間 $[0, 1]$ を $I_+ = (0, 1)$, $I_- = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ と分け, 対応して $M = M_+ \cup M_-$ と分ける.

$M_+ \cap M_- = M_0 \sqcup M_1$ と二つの連結成分に分かれる. コンパクト台の Mayer-Vietories 完全列により,

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^k(M) & \longleftarrow & H_c^k(M_+) \oplus H_c^k(M_-) & \xleftarrow{\varphi} & H_c^k(M_0) \oplus H_c^k(M_1) \\
 & & d_* & & \\
H_c^{k-1}(M) & \longleftarrow & H_c^{k-1}(M_+) \oplus H_c^{k-1}(M_-) & \longleftarrow & H_c^{k-1}(M_0) \oplus H_c^{k-1}(M_1)
\end{array}$$

を得る. ここで, $M_\pm$, M_0, M_1 はすべて $\mathbf{R}^2$ と微分同相であることに注意し, $H_c^k(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}$ ($k = 2$ のとき), $= 0$ (それ以外のとき) であり, $H_c^2(\mathbf{R}^2) \cong \mathbf{R}$ は, 積分 $[\alpha] \mapsto \int_{\mathbf{R}^2} \alpha$ で与えられることを思い出しておく. そうすると $H_c^2(M_+) \oplus H_c^2(M_-) \xleftarrow{\varphi} H_c^2(M_0) \oplus H_c^2(M_1)$ として, $H_c^2(M) \cong \operatorname{Coker} \varphi$, $H_c^1(M) \cong \operatorname{Ker} \varphi$ となる. φ を行列表示すると, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ となる. (詳細略. しかし, ここがポイント.)

したがって, $\operatorname{Coker} \varphi = 0$, $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ であり, $H_c^*(M) = 0$ となる.

略解 17. (1) 先週の略解と同様に議論する. しかし, コンパクト台のときには, S^1 とホモトピックだから.... という議論が使えないので, その代わりに**問題 15** を使う. このときに $H_c^1(U_k \setminus \{p_k\}) \cong H_c^1(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ が A_k の上で積分することによって $\mathbf{R}$ に同型になることを注意する. すると帰納法により $H_c^1(M_k)$ は $A_1, \ldots, A_k$ の上で積分することによって $\mathbf{R}^k$ と同型になることが分かる. $H_c^2(M_k)$ は $\mathbf{R}$ となる. (何故か？)

(2) 先週の略解と同様に $S^2 = U \cup V$ $(V \simeq M)$ となるように S^2 を分割し, Mayer-Vietories 完全列を書くと

$$\begin{tikzcd}
0 & H_c^2(S^2) \arrow[l] & H_c^2(M) \oplus H_c^2(U) \arrow[l] & H_c^2(U \cap V) \arrow[l] & \\
 & H_c^1(S^2) \arrow[urr, "d_{1*}"] & H_c^1(M) \oplus H_c^1(U) \arrow[l] & H_c^1(U \cap V) \arrow[l] & \\
 & H_c^0(S^2) \arrow[urr, "d_{0*}"] & H_c^0(M) \oplus H_c^0(U) \arrow[l] & H_c^0(U \cap V) \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

となる. $U \cap V$ は, 三つの $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ の非交和と微分同相なので $H_c^p(U \cap V) \cong \mathbf{R}^3$ $(p = 1, 2)$, $\cong 0$ $(p \neq 1, 2)$ である. また $H_c^p(U) \cong \mathbf{R}^3$ $(p = 2) \cong 0$ $(p \neq 2)$ である. さらに $H_c^p(S^2) = \mathbf{R}$ $(p = 0, 2)$, $\cong 0$ $(p \neq 0, 2)$ である.

写像を計算してみると (詳細略), $d_{0*}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ は $d_{0*}(x) = (x, x, x)$ である. よって $H_c^0(M) \cong \operatorname{Ker} d_{0*} = 0$, $H_c^1(M) \cong \operatorname{Coker} d_{0*} = \mathbf{R}^2$ である. また、一番上の列は $H_c^1(S^2) = 0$ であるから短完全列となることより, $H_c^2(M) \cong \mathbf{R}$ が従う. $H_c^1(M) \cong \mathbf{R}^2$ は, 図の γ_1, γ_2 に沿って積分するもので与えられることが, 完全列を追うと分かる. (詳細略)

$H_c^p(\Sigma_g)$ の計算については略.

略解 18. 少し一般的に証明する.

(1) α が全射, β と δ が単射であるならば, γ は単射である.

$c \in \operatorname{Ker} \gamma$ とする.

1. $\delta f_3(c) = f_3' \gamma(c) = 0$ であり, δ は単射だから, $f_3(c) = 0$ である. C における完全性から $c = f_2(b)$ となるような $b \in B$ が存在する.

2. $f_2' \beta(b) = \gamma f_2(b) = \gamma(c) = 0$ である. B' における完全性から, $\beta(b) = f_1'(a')$ となるような $a' \in A'$ が存在する. α が全射だから, $\alpha(a) = a'$ となるような $a \in A$ が存在する.

3. $\beta f_1(a) = f_1' \alpha(a) = f_1'(a') = \beta(b)$ である. β の単射性により, $f_1(a) = b$ である.

4. $c = f_2(b) = f_2 f_1(a)$ であるが, 完全性 (正確には合成が 0 になることで十分) により, $c = 0$ である.

よって, γ が単射であることが示された.

(2) ε が単射, β と δ が全射であるならば, γ は全射である.

$c' \in C'$ とする.

1. $f_3'(c')$ を考えると, δ が全射であることから, $\delta(d) = f_3'(c')$ となる $d \in D$ が存在する.

2. $\varepsilon f_4(d) = f_4' \delta(d) = f_4' f_3'(c')$ で, これは 0 である. ε は単射であるから, $f_4(d) = 0$ である. D における完全性から $f_3(c) = d$ となる c が存在する.

3. $f_3' \gamma(c) = \delta f_3(c) = \delta(d) = f_3'(c')$ であるから, $f_3'(c' - \gamma(c)) = 0$ である. C' における完全性により, $c' - \gamma(c) = f_2'(b')$ となる $b' \in B'$ が存在する.

4. β が全射であるから, $b' = \beta(b)$ となる $b \in B$ が存在する. $\gamma f_2(b) = f_2' \beta(b) = f_2'(b') = c' - \gamma(c)$ である. したがって, $c' = \gamma(f_2(b) + c)$ となり, よって γ は全射である.

両方合わせて, 主張が証明された.