幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2008年11月5日(水)

問題 20. **問題13,14,16,17**をもう一度, きちんと解きなさい.

問題 21. (1) S^1 を $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と見なす. 整数 n に対して, 写像 $f\colon S^1 \to S^1$ を $f(t) = nt$ で定義する. このとき f の写像度が n であることを, 積分を使って証明せよ. ただし写像度とは, $H^1(S^1) \cong \mathbf{R}$ に f^* が誘導する写像が, 何倍する写像かで定義される. もう少し詳しくいうと, $H^1(S^1) \cong \mathbf{R}$ の同型が, $[\alpha] \mapsto \int_{S^1} \alpha$ で与えられることに注意して, $f^*[\alpha]$ の積分を計算して証明する.

(2) $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ とし, $f\colon S^n \to S^n$ を, $f(x) = -x$ で定義する. このとき f の写像度を求めよ. **ヒント**. Stokes の定理を使って, $D^{n+1} = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| \le 1\}$ 上の $(n+1)$ 次微分形式から, S^n 上の n 次微分形式で積分が計算できるものを構成せよ.

(3) (**代数学の基本定理**) S^2 を $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ と思い, さらに一次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^1$ とみなす. 多項式写像 $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ が, $\tilde{f}([z_0 : z_1]) = [z_0^n : z_1^n + a_1 z_0 z_1^{n-1} + \cdots + a_n z_0^n]$ によって, $\mathbf{C}P^1$ の間の写像に拡張されることに注意する. $\tilde{f}$ の写像度が n であることを証明せよ. **ヒント**. 積分を用いて具体的に計算するのは面倒なので, **問題11**(3) の方法を使え.

問題 22. (cf. 教科書 Ex. 6.45) X を $[0,2] \times (-1,1)$ を $(0,x) \sim (2,x)$ から生成される同値関係で貼り合わせてできる多様体とする. これは, $S^1 \times (-1,1)$ に他ならない. $f\colon X \to X$ を, $f(t,x) = ((t+1) \bmod 2, -x)$ で定義する. f は well-defined で, $f^2 = \mathrm{id}$ であり, これにより, X には, 群 $\{\pm 1\}$ が作用する. $X/\{\pm 1\}$ は, メビウスの帯 M である. 商写像を $\pi\colon X \to M$ とする. このとき $H_c^*(M) \ni [\alpha] \mapsto \pi^*[\alpha] \in H_c^*(X)$ を考える. その値域は, $H_c^*(X)^{\pm 1}$ (群は f^* で作用する) であり, $H_c^*(M) \xrightarrow[\cong]{\pi^*} H_c^*(X)^{\pm 1}$ と同型写像を誘導することを証明し, これを用いて, $H_c^*(M)$ を計算せよ.

問題 23. f を C^∞ 級多様体 N から自分自身への微分同相写像とし, $N \times [0,1]$ に, $(x,0) \sim (f(x),1)$ で生成される同値関係を入れ, $M = N \times [0,1]/\sim$ と定義する. M は C^∞ 級多様体であり, mapping torus と呼ばれる.

(1) このとき

$$0 \to \frac{H^{k-1}(N)}{\mathrm{Image}(\mathrm{id} - f^*)} \to H^k(M) \to H^k(N)^{f^*} \to 0$$

という完全系列を導け. ただし f^* は, f の誘導する準同型 $f^*\colon H^k(N) \to H^k(N)$ であり, $H^{k-1}(N)^{f^*}$ は, f^* で固定される部分空間とする.

(2) $N = S^1$, $f(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$ として, 上の構成により, M を定義する. M は Klein の壷であることを示して, そのコホモロジーを求めよ.

略解 21. (1) $\alpha = dt$ とおく. $\int_0^1 \alpha = 1$ である. $f^*(\alpha) = n\alpha$ より, $\int_0^1 f^*(\alpha) = n$ であり, 写像度は n である.

(2) $\alpha = x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$ とおく. $d\alpha = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$ であり, Stokes の定理により, $0 \neq \int_{D^{n+1}} d\alpha = \int_{S^n} \alpha$ である. このとき $f^*(d\alpha) = f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}) = (-1)^{n+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$ であるから, 再び Stokes の定理を用いて $\int_{S^n} f^*(\alpha) = (-1)^{n+1} \int_{S^n} \alpha$ である. よって写像度は $(-1)^{n+1}$ である. または, n が奇数のとき向きが保たれ, n が偶数のとき向きが逆にされることを (例えば座標を使って) 計算して証明してもよい.

(3) $f_0(z) = z^n$ とおき, $\tilde{f}_0$ を $\mathbf{C}P^1$ への拡張とすると, **問題** 11 と同じやり方で, $\tilde{f}$ と $\tilde{f}_0$ はホモトピックである. (この場合は, 固有写像であることをチェックする必要がなくなるので, より簡単である.) したがって写像度は等しい. $\tilde{f}_0$ については 1 の逆像を調べて, **問題** 11 と同様にして, 写像度が n であることが分かる. (詳細略)

詳解 22. π の微分 $d\pi_x \colon T_x X \to T_{\pi(x)} M$ を考える. π が定義域を小さくすると微分同相になることから, $d\pi_x$ は同型写像である. また, $y \in M$ に対し, $\pi(x) = y$ となる x は丁度二個, x と $f(x)$ であることを注意する. (X は M の**二重被覆**であるということである.) このとき, $T_x X \xrightarrow[d\pi_x]{\cong} T_{\pi(x)} M \xleftarrow[d\pi_{f(x)}]{\cong} T_{f(x)} X$ の合成を考えると, これは df_x で与えられることが分かる.

問の主張を示すために, まず微分形式のレベルで, $\Omega_c^k(M) \ni \alpha \mapsto \pi^*\alpha \in \Omega_c^k(X)^{\pm 1}$ が同型写像であることを示す.

α を M 上の微分形式とする. $\pi^*\alpha$ は, X 上の微分形式である. さらに, $f^*\pi^*\alpha = (\pi \circ f)^*\alpha = \pi^*\alpha$ であるから, $\pi^*\alpha$ は, f^* で不変である. 逆に ω が f^* で不変であるとする. このとき, $T_y M \to \mathbf{R}$ を, $\pi^{-1}(y) = x$ を取って, 上の $(d\pi_x)^{-1}$ を通じて $T_{\pi(x)} M \xrightarrow[(d\pi_x)^{-1}]{\cong} T_x X \xrightarrow{\omega_x} \mathbf{R}$ によって定義する. 上の注意により, x を取っても, $f(x)$ を取っても, ω が f^* で不変であることから同じ値になる. さらに, $y = \pi(x)$ を動かしたときに, y について滑らかに依存することが, $y \mapsto x$ が定義域を小さく取り直せば微分同相であることから従う.

そこで, $H_c^*(M) \ni [\alpha] \mapsto \pi^*[\alpha] = [\pi^*\alpha] \in H_c^*(X)$ を考える. 上の考察から, $\pi^*[\alpha] \in H_c^*(X)^{\pm 1}$ である. このとき, $\pi^* \colon H_c^*(M) \to H_c^*(X)^{\pm 1}$ が同型であることを示す.

まず単射であることをいう. $[\pi^*\alpha] = 0$ であるとすると, $\pi^*\alpha = d\omega$ となる, $\omega \in H_c^*(X)$ が存在する. このとき, $\tilde{\omega} = \frac{1}{2}(\omega + f^*\omega)$ とおくと, $f^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ であるから, 上の議論により, $\tilde{\omega}$ は M 上の微分形式 β を定める. さらに $d\tilde{\omega} = \frac{1}{2}(d\omega + f^* d\omega) = \pi^*\alpha$ であるから, $d\beta = \alpha$ である. よって $[\alpha] = 0$ であり, π^* は単射である.

次に全射であることをいう. $[\omega] \in H_c^*(X)$ が, $f^*[\omega] = [\omega]$ を満たすとする. $f^*\omega = \omega + d\tau$ となる $\tau \in H_c^*(X)$ が存在する. このとき, $d(f^*\tau) = f^* d\tau = \omega - f^*\omega = -d\tau$ に注意して, $f^*(\omega + \frac{1}{2}d\tau) = \omega + d\tau - \frac{1}{2}d\tau = \omega + \frac{1}{2}d\tau$ である. したがって, $\omega + \frac{1}{2}d\tau$ は, M 上の微分形式 α で, $\pi^*\alpha = \omega + \frac{1}{2}d\tau$ となるものを定める. $[\omega] = [\omega + \frac{1}{2}d\tau]$ であるから, これは全射であることを示している. このようにして主張が示された.

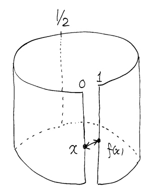
次にこれを用いて $H_c^k(M)$ を計算する. さて, $H_c^k(X) \xleftarrow[e_*]{\cong} H_c^{k-1}(S^1) = \mathbf{R}$ $(k = 1, 2)$, $= 0$ (それ以外) である. ただし, $e_*[\alpha] = [p^*\alpha \wedge e]$ ($p \colon X \cong S^1 \times (-1, 1) \to S^1$, α は S^1 上の 0 次または 1 次の微分形式, e は $(-1, 1)$ 上のコンパクト台を持ち積分が 1 の 1 次微分形式) である. このとき, f が $(-1, 1)$ の向きを逆にしていることに注意して $f^* e = -e$ である. よって $f^*(p^*\alpha \wedge e) = -(p \circ f)^*\alpha \wedge e$ である. ところが, $p \circ f(t, x) = (t + 1) \bmod 2$ は, p とホモトピックである. (何故か?) したがって, $[(p \circ f)^*\alpha] = [p^*\alpha]$ であり, よって, $f^*[p^*\alpha \wedge e] = -[p^*\alpha \wedge e]$ である. そうすると, 不変部分空間 $H_c^*(X)^{\pm 1}$ は 0 しか含まない.

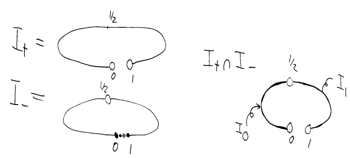
詳解 23. (1) 区間 $[0,1]$ を $I_+ = (0,1)$, $I_- = [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ と分け, 対応して $M = M_+ \cup M_-$ と分ける. $M_+ \ni [(x,t)] \mapsto (x,t) \in N \times I_+$ により, M_+ は $N \times I_+$ と微分同相であり, M_- は

$$M_- \ni [(x,t)] \mapsto \begin{cases} (x,t) & 0 \le t < \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ (f^{-1}(x), t-1) & \frac{1}{2} < t \le 1 \text{ のとき} \end{cases} \in N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

により, $N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ と微分同相である. ただし $[(x,0)] = [(f(x),1)]$ の行き先が, 上の場合でも下の場合でも $(x,0)$ となって well-defined であることに注意しよう. この微分同相をそれぞれ F_+, F_- であらわす. $N \times I_+$, $N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ は, 共に N にホモトピックである. しかし記号を区別するために前者を N_+, 後者を N_- で表わすことにする.

次に, $I_+ \cap I_1 = (0, \frac{1}{2}) \sqcup (\frac{1}{2}, 1)$ となるが, 最初の連結成分を I_0, 後者を I_1 で表わす. このとき $M_+ \cap M_-$ は, 微分同相 $M_+ \cong N \times I_+$ を通じて, $N \times I_0 \sqcup N \times I_1$ と微分同相である. $N \times I_0$, $N \times I_1$ は, 共に N とホモトピックである. しかし記号を区別するために前者を N_0,





後者を N_1 で表わすことにする.

Mayer-Vietoris 完全列より

$$\begin{tikzcd} H^k(M) \arrow[r] & H^k(N_+) \oplus H^k(N_-) \arrow[r, "\varphi"] & H^k(N_0) \oplus H^k(N_1) \\ H^{k-1}(M) \arrow[r] & H^{k-1}(N_+) \oplus H^{k-1}(N_-) \arrow[r, "\varphi"'] & H^{k-1}(N_0) \oplus H^{k-1}(N_1) \arrow[ull, "d^*"] \end{tikzcd}$$

を得る. このとき φ を行列表示すると

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & f^* \end{pmatrix}$$

となる. (詳細は後述) よって

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{u \oplus v \in H^k(N_+) \oplus H^k(N_-) \mid u+v=0, u+f^*(v)=0\} \cong H^k(N)^{f^*},$$

$$\operatorname{Coker}\varphi = \frac{H^k(N_0) \oplus H^k(N_1)}{\{x \oplus y \in H^k(N_0) \oplus H^k(N_1) \mid x = u+v, y = u+f^*(v)\}} \cong \frac{H^k(N)}{\mathrm{Image}(\mathrm{id} - f^*)}$$

を得る. 従って結論を得る.

φ の計算を説明する. φ を $M_\pm$ に戻って書き直すと,

$$\begin{array}{ccc}
H^k(M_+)\oplus H^k(M_-) & \xrightarrow{\ \Phi\ } & H^k(M_+\cap M_-) \\
{\scriptstyle F_+^*\oplus F_-^*}\Big\uparrow\cong & & \cong\Big\uparrow \left(F_+|_{M_+\cap M_-}\right)^* \\
H^k(N_+\times I_+)\oplus H^k(N_-\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})) & & H^k(N_0\times(I_0\sqcup I_1)) \\
{\scriptstyle \pi_+^*\oplus\pi_-^*}\Big\uparrow\cong & & \cong\Big\downarrow {\scriptstyle s_0^*\oplus s_1^*} \\
H^k(N_+)\oplus H^{k-1}(N_-) & \xrightarrow[\varphi]{} & H^k(N_0)\oplus H^k(N_1)
\end{array}$$

となる. 一番上の横矢印 Φ は

$$[\alpha_+]\oplus[\alpha_-]\mapsto\Big[\alpha_-|_{M_+\cap M_-}-\alpha_+|_{M_+\cap M_-}\Big]$$

であり, $\pi_+\colon N_+\times I_+\to N_+$, $\pi_-\colon N_-\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\to N_-$ は第一成分を取る写像であり, s_0, s_1 は, $N_0\to N_0\times(I_0\sqcup I_1)$ で, それぞれ $x\mapsto(x,\frac{1}{4})$, $x\mapsto(x,\frac{3}{4})$ で与えられるものである. (Poincaré の補題にでてきた同型写像の定義を思いだそう.)

順番に計算していくと

$$\begin{aligned}
&\varphi([\beta_+]\oplus[\beta_-])\\
&=(s_0^*\oplus s_1^*)\circ\Big(\big(F_+|_{M_+\cap M_-}\big)^{-1}\Big)^*\circ\Phi\circ(F_+^*\oplus F_-^*)\circ(\pi_+^*\oplus\pi_-^*)([\beta_+]\oplus[\beta_-])\\
&=(s_0^*\oplus s_1^*)\circ\Big(\big(F_+|_{M_+\cap M_-}\big)^{-1}\Big)^*\Big[(\pi_-\circ F_-)^*\beta_-|_{M_+\cap M_-}-(\pi_+\circ F_+)^*\beta_+|_{M_+\cap M_-}\Big]\\
&=(s_0^*\oplus s_1^*)\circ\Big(\big(F_+|_{M_+\cap M_-}\big)^{-1}\Big)^*\Big[(\pi_-\circ F_-|_{M_+\cap M_-})^*\beta_--(\pi_+\circ F_+|_{M_+\cap M_-})^*\beta_+\Big]\\
&=\ \Big[(\pi_-\circ F_-|_{M_+\cap M_-}\circ\big(F_+|_{M_+\cap M_-}\big)^{-1}\circ s_0)^*\beta_--(\pi_+\circ F_+|_{M_+\cap M_-}\circ\big(F_+|_{M_+\cap M_-}\big)^{-1}\circ s_0)^*\beta_+\Big]\\
&\quad\oplus\Big[(\pi_-\circ F_-|_{M_+\cap M_-}\circ\big(F_+|_{M_+\cap M_-}\big)^{-1}\circ s_1)^*\beta_--(\pi_+\circ F_+|_{M_+\cap M_-}\circ\big(F_+|_{M_+\cap M_-}\big)^{-1}\circ s_1)^*\beta_+\Big]
\end{aligned}$$

となる. 合成写像を定義にしたがって計算してみると,

$$\pi_-\circ F_-|_{M_+\cap M_-}\circ\big(F_+|_{M_+\cap M_-}\big)^{-1}\circ s_1=f^{-1}$$

で, その他のものは id である. したがって

$$\varphi([\beta_+]\oplus[\beta_-])=([\beta_-]-[\beta_+])\oplus\big((f^{-1})^*[\beta_-]-[\beta_+]\big)$$

となる. このまま行列表示すれば,

$$\begin{pmatrix}-\mathrm{id} & \mathrm{id}\\ -\mathrm{id} & (f^{-1})^*\end{pmatrix}$$

であるが, 適当に右左から行列を掛ければ, 上のものになる.

(2) Klein の壷は $[0,1]\times[0,1]$ の上下を普通に貼り合わせ, 左右をひっくり返して貼り合わせたものである. これは, 与えられた N, f から M を作るやり方に他ならない. このとき $f^*\colon H^0(S^1)\to H^0(S^1)$ は恒等写像であり, $f^*\colon H^1(S^1)\to H^1(S^1)$ は, 向きを逆にすることから -1 倍する写像である. これから, (1) の完全列により, $H^0(M)\cong\mathbf{R}$ (これは計算せずとも連結から直ちに分かる), $H^1(M)\cong\mathbf{R}$, $H^2(M)\cong 0$ が従う.