幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2008 年 11 月 26 日 (水)

問題 32. 1 次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^1 = \{[z_0 : z_1] \mid (z_0, z_1) \neq (0,0)\}$ を考える. $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$, $U_1 = \{z_1 \neq 0\}$ という二枚の座標近傍を取り, $\mathbf{C}P^1$ 上のベクトル束 E を $U_0 \times \mathbf{C}$ と $U_1 \times \mathbf{C}$ を

$$([z_0 : z_1], v) \mapsto \left([z_0 : z_1], \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^k v\right)$$

という変換関数で貼り合わせて定義する. ただし k は整数である.
(1) $\mathbf{C}P^1$ の接束は, k がいくつのベクトル束と同型か? またトートロジカル直線束

$$L = \{([z_0 : z_1], (v_0, v_1)) \in \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}^2 \mid (v_0, v_1) = \lambda(z_0, z_1) \text{ for some } \lambda \in \mathbf{C}\}$$

は, k がいくつのベクトル束と同型か?
(2) E から 0 切断 (の像) を除いた多様体を P として, そのコホモロジーを計算せよ.

問題 33. M 上のベクトル束の短完全列

$$0 \to S \to E \to Q \to 0$$

があったとする. (恒等写像を cover するバンドル写像 $S \to E$, $E \to Q$ があって, 各点 $x \in M$ ごとに, $0 \to S_x \to E_x \to Q_x \to 0$ は短完全列をなす.) さらに E_x $(x \in M)$ に内積 $(\ ,\ )_x$ を $x \in M$ について滑らかに依存するように入れておく. このとき, 各点 $x \in M$ ごとに S_x の E_x における直交補空間 $S_x^\perp$ を取って, $S^\perp = \bigcup_{x \in M} S_x^\perp$ を定義する. すると, $S^\perp$ は, M 上のベクトル束であって, Q と同型になることを証明せよ. E は, $S \oplus Q$ と同型になることを証明せよ.

問題 34. M を C^∞ 多様体とし, $\Delta\colon M \to M \times M$ を対角線埋め込み $x \mapsto (x, x)$ とする. $\Delta(M)$ の $M \times M$ における法束は, M の接束と同型であることを証明せよ.

略解 32. (1) まず接束のときを調べる. U_0 上で, 座標 $w_0 = z_1/z_0$, U_1 上で $w_1 = z_0/z_1$ を取る. $U_0 \cap U_1$ 上では $w_1 = 1/w_0$ である. $w_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ $(\alpha = 0, 1)$ とするとき

$$a \left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right|_{[z_0:z_1]} + b \left.\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right|_{[z_0:z_1]} \xrightarrow[\cong]{\varphi_\alpha} ([z_0 : z_1], (-1)^\alpha (a + bi))$$

によって, 局所自明化 $\varphi_\alpha \colon T\mathbf{C}P^1|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbf{C}$ を定義する. $w_1 = x_1 + iy_1 = 1/w_0 = (x_0 - iy_0)/(x_0^2 + y_0^2)$ に注意して,

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}\right) = -\frac{x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

を得る. 同様に

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_0} = -\frac{2x_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_0} = \frac{2x_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y_0} = -\frac{x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

となる. したがって座標変換公式は

$$\begin{aligned} a\frac{\partial}{\partial x_0} + b\frac{\partial}{\partial y_0} &= a\left[\frac{\partial x_1}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial y_1}\right] + b\left[\frac{\partial x_1}{\partial y_0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial y_0}\frac{\partial}{\partial y_1}\right] \\ = \ &-\frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^2}\left[\left(a(x_0^2 - y_0^2) + 2bx_0y_0\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(-2ax_0y_0 + b(x_0^2 - y_0^2)\right)\frac{\partial}{\partial y_1}\right] \end{aligned}$$

となる. したがって $(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})([z_0 : z_1], a + bi)$ の第二成分は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^2}\left[\left(a(x_0^2 - y_0^2) + 2bx_0y_0\right) + \left(-2ax_0y_0 + b(x_0^2 - y_0^2)\right)i\right] \\ &= \frac{a + bi}{(x_0^2 + y_0^2)^2}\left(x_0^2 - y_0^2 - 2ix_0y_0\right) = (a + bi)\frac{1}{w_0^2} = (a + bi)\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2 \end{aligned}$$

である. したがって, $k = -2$ のベクトル束と同型である.

次にトートロジカル直線束のときを考える. $\varphi_0 \colon L|_{U_0} \xrightarrow{\cong} U_0 \times \mathbf{C}$ を $([z_0 : z_1], (v_0, v_1)) \mapsto ([z_0 : z_1], v_0)$, $\varphi_1 \colon L|_{U_1} \xrightarrow{\cong} U_1 \times \mathbf{C}$ を $([z_0 : z_1], (v_0, v_1)) \mapsto ([z_0 : z_1], v_1)$ によって定義する. 逆写像はそれぞれ, $([z_0 : z_1], v) \mapsto ([z_0 : z_1], (v, \frac{z_1}{z_0}v))$, $([z_0 : z_1], w) \mapsto ([z_0 : z_1], (\frac{z_0}{z_1}w, w))$ であり, 確かに微分同相になっていることに注意する. このとき変換関数

$$(U_0 \cap U_1) \times \mathbf{C} \xrightarrow{\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}} (U_0 \cap U_1) \times \mathbf{C}$$

は, 第一成分が id で, 第二成分が

$$v \mapsto w = \frac{z_1}{z_0}v$$

と移っており, $k = 1$ のベクトル束に同型である.

(2) P を $\pi^{-1}(U_0)$ と $\pi^{-1}(U_1)$ に分けて Mayer-Vietoris 完全列を使う. $\pi^{-1}(U_i) \xrightarrow[\cong]{\phi_i} U_i \times (\mathbf{C} \setminus \{0\})$ は, S^1 を変形レトラクトに含むので, H^0, H^1 が $\mathbf{R}$ で, その他は 0 である. また,

$\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1)$ は, ϕ_0 を通じて $(U_0\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ と微分同相であり, $S^1\times S^1$ を変形レトラクトに含む. したがって, H^0, H^2 が $\mathbf{R}$ で, H^1 が二次元である.

$$\begin{tikzcd}
H^3(P) \arrow[r] & 0\oplus 0 \arrow[r] & 0 \\
H^2(P) \arrow[r] & 0\oplus 0 \arrow[r] & H^2(\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1)) \arrow[ull, "d^*"'] \\
H^1(P) \arrow[r] & H^1(\pi^{-1}(U_0))\oplus H^1(\pi^{-1}(U_1)) \arrow[r, "\alpha"'] & H^1(\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1)) \arrow[ull, "d^*"'] \\
H^0(P) \arrow[r] & H^0(\pi^{-1}(U_0))\oplus H^0(\pi^{-1}(U_1)) \arrow[r, "\beta"'] & H^0(\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1)) \arrow[ull, "d^*"']
\end{tikzcd}$$

を得る. $H^3(P)\cong\mathbf{R}$ が直ちに分かる. 連結性を考えれば β は全射であるから, $H^1(P)\cong\operatorname{Ker}\alpha$, $H^2(P)\cong\operatorname{Coker}\alpha$ である.

そこで α を調べる. コホモロジーの自然な基底を取っておく. (取り方の説明は略.) まず $H^1(\pi^{-1}(U_0))\to H^1(\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1))$ は, 包含写像 $(\mathbf{C}\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\})\hookrightarrow\mathbf{C}\times(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ から誘導される $H^1(\mathbf{C}\times(\mathbf{C}\setminus\{0\}))\to H^1((\mathbf{C}\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\}))$ に等しく, 行列表示すれば $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ となる.

一方, $H^1(\pi^{-1}(U_1))\to H^1(\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1))$ は, 包含写像 $(\mathbf{C}\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\})\hookrightarrow\mathbf{C}\times(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ の前に C^∞ 写像

$$(\mathbf{C}\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\})\to(\mathbf{C}\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\});\qquad (z,v)\mapsto(z,z^kv)$$

を合成したものに等しい. これを行列表示すると $\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}$ となる. したがって, $k=0$ のときは α は階数 1 で, $k\neq0$ のときは α は可逆となる. よって $k=0$ のとき $H^1(P)=\mathbf{R}$, $H^2(P)=\mathbf{R}$, $k\neq0$ のとき $H^1(P)=0$, $H^2(P)=0$ である.

略解 33. S に, E の内積を制限して内積を定義する. S の局所的な枠で, 各点ごとに正規直交基底になるものを取り, さらにその枠に, $\operatorname{rank}E-\operatorname{rank}S$ 個の E の切断を付け加えて E の局所的な正規直交している枠を取る. このとき, この枠が座標ベクトルになるような局所自明化 $E|_U\cong U\times\mathbf{R}^n$ の下では, S は $U\times(\mathbf{R}^{\operatorname{rank}S}\oplus\{0\})$ となり, したがって, $S^\perp$ は $U\times(\{0\}\oplus\mathbf{R}^{n-\operatorname{rank}S})$ となる. このような枠を二つ取ったときに, その変換関数は, S を保っていることから $\begin{bmatrix}* & *\\0 & *\end{bmatrix}$ という形をしているが, 直交行列でなければいけないことから, さらに $\begin{bmatrix}* & 0\\0 & *\end{bmatrix}$ という形でなければならないことが分かる. これを $\begin{bmatrix}g^S_{\alpha\beta} & 0\\0 & g^{S^\perp}_{\alpha\beta}\end{bmatrix}$ と書けば, $g^{S^\perp}_{\alpha\beta}$ が $S^\perp$ の変換関数となり, $S^\perp$ はベクトル束である. 一方, $g^S_{\alpha\beta}$ は S の変換関数であり, 上の変換関数の形から, $E=S\oplus S^\perp$ も分かる. また, $S^\perp\to E\to Q$ の合成によって, $S^\perp\cong Q$ も従う.

略解 34. $T(M\times M)$ の Δ による引き戻しは, $TM\oplus TM$ と同型である. そして, Δ の微分は,

$$TM\to TM\oplus TM;\qquad v\mapsto v\oplus v$$

を引き起こす. このとき,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & TM & \to & TM \oplus TM & \to & TM & \to & 0 \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\
 & & v & \mapsto & v \oplus v & & & & \\
 & & & & v \oplus w & \mapsto & v - w & &
\end{array}$$

とおくと, ベクトル束の完全列を与えており, よって商束はTMと同型となる.