幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2008年12月3日(水)

問題 35. M の部分多様体 R と S が横断的に交わっているとき, $R \cap S$ は部分多様体であり, $x \in R \cap S$ における接空間は $T_xR \cap T_xS$ であることを証明せよ.

$\pi\colon E \to M$ を向きのつけられた階数 r のベクトル束とし, $\Phi \in H^r_{cv}(E)$ をそのトム類とする. 0-切断を $s_0\colon M \to E$ としたとき $s_0^*\Phi \in H^n(M)$ を E の**オイラー類**といい, $e(E)$ で表わす. (この定義は教科書のものとは異なるが, Prop. 12.4 で同じであることが保証される.)

難問 36. (教科書 Prop. 12.7, Prop. 12.8) $\pi\colon E \to M$ をベクトル束とし, $s\colon M \to E$ をその切断とする. s が 0-切断 s_0 と**横断的に交わる**とは, $s(M)$ と $s_0(M)$ を共に E の部分多様体とみなしたときに横断的に交わっていることをいう.

(1) s が 0-切断と横断的に交わることは, 次と同値である: $x \in s^{-1}(0) = \{x \in M \mid s(x) = 0\}$ において, x の近傍 U における局所自明化 $\phi\colon E|_U \to U \times \mathbf{R}^n$ を取る. $\phi \circ s$ の第二成分を取ることにより, U 上で定義された $\mathbf{R}^n$-値関数 $\tilde{s}$ を考えるとき, x における微分 $d\tilde{s}_x\colon T_xM \to \mathbf{R}^n$ は全射である.

(2) s が 0-切断と横断的に交わるとき, $s^{-1}(0)$ は部分多様体であり, (M における) 法束 N は E の $s^{-1}(0)$ への制限と同型である.

(3) $s^*\Phi = s_0^*\Phi$ を示せ.

(4) M も E も向きづけられているものとする. $s^{-1}(0)$ のポアンカレ双対が E のオイラー類に等しいことを証明せよ.

問題 37. 複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ を $\mathbf{C}^{n+1}$ の中の一次元部分空間 ℓ の全体として定義する. このときトートロジカル直線束を

$$L = \{(\ell, z) \in \mathbf{C}P^n \times \mathbf{C}^{n+1} \mid z \in \ell\}$$

と定義する. (前回と同様.) L に適当に向きを入れ, さらにその双対束 L^* の切断をうまく取り, **問題** 36 を用いて, $n = 1$ のときに L^* のオイラー類 $e(L^*) \in H^2(\mathbf{C}P^1, \mathbf{R})$ の積分

$$\int_{\mathbf{C}P^1} e(L^*)$$

を計算せよ.

問題 38. $\mathbb{C}P^2$ を複素二次元射影空間とし，$[x : y : z]$ $(x, y, z \in \mathbb{C})$ を同次座標とする．$L = \{[x : y : 0] \mid (x, y) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ とする．L は複素一次元射影空間と微分同相な，$\mathbb{C}P^2$ 内の 2 次元閉部分多様体である．また，$L' = \{[x : 0 : z] \mid (x, z) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ を同様に考える．L, L' のポアンカレ双対を $\eta_L, \eta_{L'} \in H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbf{R})$ で表わす．ただし向きは，非同次座標で入れる．このとき

(1) $\eta_L = \eta_{L'}$ を示せ．

(2) L と L' の交わりを調べることによって

$$\int_{\mathbb{C}P^2} \eta_L \wedge \eta_L$$

を求めよ．

問題 39. 特異ホモロジー $H_q(X; \mathbf{Z})$ の定義に出てきた $\partial\partial = 0$ の証明を与えよ．

略解 35. 「$f\colon M \to N$ が C^∞ 級写像で $y \in N$ が, f の正常値のとき, $f^{-1}(y)$ は部分多様体である」という結果に帰着できる。

略解 36. (1) まず $s(M) \cap s_0(M)$ は, 自然に $s^{-1}(0)$ と同一視されることに注意しておく.
局所的に考えればよいので, $\phi\colon E|_U \to U \times \mathbf{R}^n$ を取って考えればよい. $s_0(M)$ を ϕ で写したものは $U \times \{0\}$ で, $s(M)$ を写したものはグラフ $\{(u, \tilde{s}(u)) \mid s \in U$ である. 接空間は, $T_{(x,0)}(U \times \mathbf{R}^n) = T_xU \oplus \mathbf{R}^n$ となる. $s_0(M)$, $s(M)$ の接空間は, $T_xU \oplus \{0\}$ と $\{v \oplus d\tilde{s}_u(v) \mid v \in T_xU\}$ である. したがって, $(x,0) \in s(M) \cap s_0(M)$ において,

$$T_{(x,0)}s(M) + T_{(x,0)}s_0(M) = T_xU \oplus \mathbf{R}^n$$

が成立するための必要十分条件は, $d\tilde{s}_x$ が全射となることである.
(2) 上のように $U \times \mathbf{R}^n$ で考えると, $s^{-1}(0)$ は $\tilde{s}^{-1}(0)$ に写され, よって接空間は $\operatorname{Ker} d\tilde{s}_x$ になる. したがって

$$T_xM/T_x(s^{-1}(0)) = T_xM/\operatorname{Ker} d\tilde{s}_x \xrightarrow[\cong]{d\tilde{s}_x} \mathbf{R}^n \xrightarrow[\cong]{\phi|_{E_x}^{-1}} E_x$$

という線形同型写像がある. これは局所自明化 ϕ の取り方によらない. (詳細略) したがって法束 N は, E の制限と同型になる.
(3) s_0^*, $s^*\colon H_{cv}^*(E) \to H^*(M)$ は, $H_{cv}^*(E) \to H^*(E) \xrightarrow[\cong]{s_0^*, s^*} H^*(M)$ という合成と書ける. s と s_0 はホモトピックであることから $H^*(E) \to H^*(M)$ は, s^* でも s_0^* でも等しい.
(4)(教科書の証明を若干詳しくした.) $s^{-1}(0)$ の管状近傍を T とし, 射影を $p\colon T \to s^{-1}(0)$ で表わす. すると $E|_T \xrightarrow[\cong]{\Psi} p^*(E|_{s^{-1}(0)})$ というベクトル束の同型が存在する. (何故か？) そこで T から $E_{s^{-1}(0)}$ への写像 S を

$$S\colon T \xrightarrow{s} E|_T \xrightarrow[\cong]{\Psi} p^*E|_{s^{-1}(0)} \xrightarrow{\tilde{p}} E|_{s^{-1}(0)}$$

の合成写像によって定義する. ただし $\tilde{p}$ は

$$\begin{tikzcd}
p^*E|_{s^{-1}(0)} \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d] & E|_{s^{-1}(0)} \arrow[d] \\
T \arrow[r, "p"'] & s^{-1}(0)
\end{tikzcd}$$

という p を cover する写像である. 必要ならば T を小さく取り直すことによって, S が T と $E|_{s^{-1}(0)}$ の $s^{-1}(0)$ の開近傍の間の微分同相を与えることが分かる.
さて, $E|_{s^{-1}(0)}$ のトム類を, その台が上の $s^{-1}(0)$ の開近傍に含まれているような微分形式 Φ で実現する. このとき $S^*\Phi$ を T の外へ 0 で拡張した $[j_*(S^*\Phi)]$ が, $s^{-1}(0)$ のポアンカレ双対を与える. ところが上の図式とトム類の自然性により, $\Psi^*\tilde{p}^*\Phi$ は, $E|_T$ のトム類を与える微分形式であり, $S^*\Phi$ はこれを s で引き戻したものである. E のトム類を表わす微分形式 Φ を取り, それを $E|_T$ に制限したものを $\Phi|_T$ で表わすと, $\Phi|_T = \Psi^*\tilde{p}^*\Phi + d\alpha$ となる $\alpha \in A_{cv}^*(E|_T)$ が存在する. したがって $[j_*(S^*\Phi)] = [j_*(s^*\Phi|_T)]$ である.

さらに, Φ の台を 0 切断の十分に近くに取るようにすると $s(M) \cap \mathrm{Supp}(\Phi) \subset s(T)$ となるようにできる. したがって $j_*(s^*\Phi|_T)$ は, $s^*\Phi$ に等しく, (3) より $[s^*\Phi] = e(E)$ であるから結論が従う.

略解 37. L の双対束 L^* の切断を,

$$\ell \in \mathbf{C}P^1 \longmapsto \mathrm{Hom}(L_\ell, \mathbf{C}) \ni \{L_\ell \ni (\ell, z) \mapsto z_1\}$$

によって定義する. ただし, $z = (z_1, z_2)$ と表わした. このとき, この切断が消えるのは, すべての $(\ell, z) \in L_\ell$ について $z_1 = 0$ となることであり, すなわち, $\ell = \mathbf{C}(0,1)$ となることである. この切断が 0-切断と横断的に交わることもすぐ分かる. (詳細略) したがって, $e(L)$ のポアンカレ双対は, $s^{-1}(0) = \{\mathbf{C}(0,1)\}$ (一点) である. さらに向きを適当に (複素平面の自然な向きから誘導されるものを) つけると, $+1$ であることも分かる. したがって,

$$\int_{\mathbf{C}P^1} e(L^*) = \int_{\mathbf{C}P^1} 1 \wedge \eta_{s^{-1}(0)} = \int_{\mathbf{C}(0,1)} 1 = 1$$

が分かる.

略解 38. (1) $F_t\colon \mathbf{C}P^2 \to \mathbf{C}P^2$ を $F_t([x:y:z]) = ([x : y\cos t - z\sin t : y\sin t + z\cos t]$ によって定義する. $F_0 = \mathrm{id}$ で, $F_{\pi/2}([x:y:z]) = [x:-z:y]$ である. $F_{\pi/2}$ は微分同相で $F_{\pi/2}(L) = L'$ であるから, $F_{\pi/2}^*\eta_{L'} = \eta_L$ が成り立つが, F_0 と, $F_{\pi/2}$ はホモトピックであるから, $F_{\pi/2}^* = \mathrm{id}$ であり, 結論が従う.

(2) L と L' は, 一点 $p = [1:0:0]$ で交わる. 非同次座標 $[x:y:z] \mapsto (y/x, z/x)$ を取り, さらに $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ によって, $\mathbf{R}^4$ に値をとる $[1:0:0]$ の回りの座標を取ると,

$$T_pL = \{(x_1, x_2, 0, 0) \in \mathbf{R}^4\}, \qquad T_pL' = \{(0, 0, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4\}$$

となり, 横断的に交わっており, また向きは正の向きで交わっている. 従って

$$\int_{\mathbb{C}P^2} \eta_L \wedge \eta_L = 1$$

が分かる.

略解 39. 容易