幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2008年12月10日(水)

問題 40. R を可換環とし,

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

を R 加群の短完全列とする.

(1) 次の a),b),c) はすべて同値であることを示せ. このとき短完全列は**分裂する**という.

a) $B \cong A \oplus C$ (同型) である.

b) ある R-準同型 $i' \colon C \to B$ で, $p \circ i' = \mathrm{id}_C$ となるものが存在する.

c) ある R-準同型 $p' \colon B \to A$ で, $p' \circ i = \mathrm{id}_A$ となるものが存在する.

(2) C が自由 R-加群のとき, 上の短完全列が分裂することを示せ. A もしくは B が自由 R-加群のときはどうか?

問題 41. (1) **問題 13** の M_k の整係数ホモロジー群を求めよ.

(2) **問題 14** の M, Σ_g の整係数ホモロジー群を求めよ.

(3) **問題 23** の完全列を整係数特異コホモロジー群において示せ. また, 整係数特異ホモロジー群については

$$0 \to \frac{H_q(N;\mathbf{Z})}{\mathrm{Image}(\mathrm{id} - f_*)} \to H_q(M;\mathbf{Z}) \to H_{q-1}(N;\mathbf{Z})^{f_*} \to 0$$

が完全になることを示せ.

(4) **問題 25** の M の整係数ホモロジー群を求めよ.

(5) **問題 32** の P の整係数ホモロジー群を, 各 k について求めよ.

(6) n 次元トーラス $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{ 個}}$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

(7) クラインの壷の $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 係数ホモロジー群を求めよ.

問題 42. (1) 立方体の辺を合わせたものを X とする. 整係数ホモロジー群を求めよ.

(2) M をメビウスの帯とする. ただし, 無限に伸びたところを有限で切り, 境界付き多様体とする. 相対ホモロジー群 $H_q(M,\partial M;\mathbf{Z})$ を求めよ.

詳解 40. (1) a) から b),c) は明らか. b) が成り立つとき, i' が単射であることに注意して, $C \cong \operatorname{Im} i'$ である. すると,

$$B \ni b \mapsto b - i'p(b) \oplus i'p(b) \in \operatorname{Im} i \oplus \operatorname{Im} i'$$

が同型写像を与える. 逆写像は,

$$\operatorname{Im} i \oplus \operatorname{Im} i' \ni i(a) \oplus i'(c) \mapsto i(a) + i'(c) \in B$$

である.

c) が成り立つときも同様に, $A \cong \operatorname{Ker} p$, $C = \operatorname{Ker} p'$ となって, $B \cong \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} p'$ となることが証明できる.

(2) C の基底を $\{c_\alpha\}_{\alpha \in A}$ とするとき, $p(b_\alpha) = c_\alpha$ となる b_α を取り (完全性よりそのような b_α が存在する),

$$C \cong \bigoplus_{\alpha \in A} R \ni \bigoplus_{\alpha \in A} r_\alpha c_\alpha \longmapsto \sum_{\alpha \in A} r_\alpha b_\alpha \in B \qquad (r_\alpha \in R)$$

によって $i' \colon C \to B$ を定義すれば, R-準同型であり, $p \circ i' = \mathrm{id}_C$ となるので, (1) により分裂する.

略解 41. (1)　(4) 略

(5)

$$H_q(P; \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0, 3 \text{ のとき} \\ \mathbf{Z}/|k|\mathbf{Z} & q = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(6) $T^n = T^{n-1} \times S^1 = T^{n-1} \times [0,1]/\!\sim$ と $f = \mathrm{id} \colon T^{n-1} \to T^{n-1}$ に関する mapping torus と見ることにする. このとき**問題 34** により

$$0 \to H_q(T^{n-1}; \mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*} H_q(T^n; \mathbf{Z}) \to H_{q-1}(T^{n-1}; \mathbf{Z}) \to 0$$

を得る. これが分裂していることをいいたい. $p \colon T^n = T^{n-1} \times S^1 \to T^{n-1}$ を第一成分への射影とし, $p_* i_* = \mathrm{id}_{H_q(T^{n-1}; \mathbf{Z})}$ を Mayer-Vietoris 完全列の定義と**問題 41**(3) の解に従って忠実に計算すれば (詳細略), これが示される. よって

$$H_q(T^n; \mathbf{Z}) = H_q(T^{n-1}; \mathbf{Z}) \oplus H_{q-1}(T^{n-1}; \mathbf{Z})$$

を得る. これは二項係数と同じ帰納関係なので,

$$H_q(T^n; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{\oplus \binom{n}{q}}$$

を得る.

または, 今の場合は $H_q(T^n; \mathbf{Z})$ が自由であることと, 短完全列が分裂することを同時に帰納的に示してもよい. ただし, 一般に $M = N \times S^1$ に関して, $H_q(M; \mathbf{Z}) = H_q(N; \mathbf{Z}) \oplus H_{q-1}(N; \mathbf{Z})$ となることは, そのやり方では示せないので, 上のやり方で示す必要がある.

(7)

$$H_q(\text{クラインの壺}; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & q = 0, 2 \text{ のとき} \\ (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\oplus 2} & q = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

略解 42. (1) X を底面に平行な面で二つに切り, $X = U \cup V$ とし, U, V は S^1 とホモトピック, $U \cap V$ は 4 点とホモトピックであることに注意して, Mayer-Vietoris 完全列を用いれば,

$$H_q(X; \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0 \text{ のとき} \\ \mathbf{Z}^5 & q = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る.

練習問題. $H_1(X; \mathbf{Z})$ の基底となるような特異サイクルのコホモロジー類 $[c_1], \ldots, [c_5]$ を作り, 連結準同型 $H_1(X; \mathbf{Z}) \to H_1(U \cap V; \mathbf{Z})$ を具体的に計算してみよ.

(2) 相対ホモロジーの完全列によって

$$H_q(M, \partial M; \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & q = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る.

練習問題. $H_1(M, \partial M; \mathbf{Z})$ の元 $[c]$ で $[c] \neq 0$, $2[c] = 0$ となるものを具体的に構成せよ.