幾何学IIテスト

担当: 中島 啓

2009 年 2 月 4 日 (水) 10:30　13:30 (180 分)

演習の平常点を一回 4 点 (x 13 回=計 52 点) とし、今回のテストの 80 点を加え、100 点以上は切捨てることによって最終成績とする。演習の平常点を加味せず、今回の試験の点を 1.25 倍して 100 点満点として採点して最終評価を希望するものは、名前の欄のすぐ下にその旨を書くこと。

採点した答案は、来週のいつかから理学部3 号館数学教室事務室で返却する。(同時に模範回答を掲示する。) その後、採点に異議のあるものは申し出ること。ただし, 採点に間違えがあったと認められる場合以外、評価の変更は受け付けられない。

問題 1. (20 点)

$$0 \to A^* \xrightarrow{\alpha} B^* \xrightarrow{\beta} C^* \to 0$$

をチェイン複体の短完全列とするとき、コホモロジー群の長完全列

$$\begin{tikzcd}
H^{k+1}(A^*) \arrow[r, "\alpha^*"] & H^{k+1}(B^*) \arrow[r, "\beta^*"] & H^{k+1}(C^*) \\
H^k(A^*) \arrow[r, "\alpha^*"] & H^k(B^*) \arrow[r, "\beta^*"'] & H^k(C^*) \arrow[ull, "d^*" description] \\
H^{k-1}(A^*) \arrow[r, "\alpha^*"] & H^{k-1}(B^*) \arrow[r, "\beta^*"'] & H^{k-1}(C^*) \arrow[ull, "d^*" description]
\end{tikzcd}$$

が導かれることを証明せよ。

問題 2. (1 問 10 点 = 計 40 点) (1) 立方体の辺を合わせたものを X とする．その整係数ホモロジー群を求めよ．

(2) 境界 ∂M を付けたメビウスの帯 M を考える。すなわち $[0,1] \times [-1,1]$ に $(0,x) \sim (1,-x)$ で生成される同値関係を考えたとき、$M = [0,1] \times [-1,1]/\sim$, $\partial M = [0,1] \times \{\pm 1\}/\sim$ である。対 $(M, \partial M)$ の整係数相対ホモロジー群 $H_*(M, \partial M; \mathbb{Z})$ を求めよ。

(3) T^2 から一点を除いた多様体 M のドラーム・コホモロジー群を求めよ。

(4) n 次元複素射影空間 $P^n(\mathbf{C})$ の中の m 次元複素射影空間 $P^m(\mathbf{C})$ $(m < n)$ を一点につぶしてできる空間 X に商位相をいれておく。X の整係数ホモロジー群を求めよ．

問題 3. (20 点) M, N は, 連結, コンパクトで向きづけられた n 次元 C^∞ 級多様体であるとする。(ポアンカレ双対性定理が成り立つことは使ってよい.) このとき, 積分によって $\int_M \colon H^n(M; \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ は $H^n(M; \mathbf{R})$ と $\mathbf{R}$ の間の同型をあたえていた. (N についても同様.) $f \colon M \to N$ を C^∞ 級写像とするときに, その次数 $\deg f$ を $f^* \colon H^n(N; \mathbf{R}) \to H^n(M; \mathbf{R})$ を上の同型によって $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への線型写像と思ったときの $f^*(1)$ の値として定める. $\deg f$ が整数となることを証明せよ. ただしドラームの定理を証明無しに用いてはならない.