幾何学入門試験解答

担当: 中島 啓

実施日: 2009 年 1 月 30 日 (金) 10:30〜12:00 (90 分)

答案を数学教室事務室で返却するので受け取ること。(４月一杯で処分する。)

略解 1 略

略解 2 (1) $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を $F(x,y,z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1$ で定義する. $dF_{(x,y,z)} = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$ であり, $dF_{(x,y,z)} = 0$ となるのは, $(x,y,z) = (0,0,0)$ であるが、この点は $F = 0$ を満たさない。そこで $U = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ と取れば、多様体の定義の最初のバージョンの条件を満している。

(2) $T_{(x,y,z)}M = \operatorname{Ker} F$ であるから,

$$\begin{aligned}&\{(X,Y,Z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x/a^2, y/b^2, z/c^2) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0\} \\ =\ &\{(X,Y,Z) \in \mathbf{R}^3 \mid xX/a^2 + yY/b^2 + zZ/c^2 = 0\}\end{aligned}$$

となる.

(3) $\tilde{f}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を同じ式 $\tilde{f}(x,y,z) = x + y + z$ で定める. $\tilde{f}$ は $\mathbf{R}^3$ 上の C^∞ 級関数である. f は $\tilde{f}$ を M に制限したものであるから, 多様体上の C^∞ 級関数の定義により, C^∞ 級である.

(4) $d\tilde{f}_{(x,y,z)} = (1,1,1)$ であるから, 求める条件は、

$$T_{(x,y,z)}M \ni (X,Y,Z) \mapsto (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = X + Y + Z$$

が 0 写像になる、ということである。これは、$(1,1,1)$ が, $(x/a^2, y/b^2, z/c^2)$ の定数倍になることに他ならない。すなわち、ある定数 λ が存在して、$(1,1,1) = \lambda(x/a^2, y/b^2, z/c^2)$ となる. よって、$x = a^2/\lambda$, $y = b^2/\lambda$, $z = c^2/\lambda$ である。これを $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ に代入すると、$\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ を得る。よって

$$(x,y,z) = \pm\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

が臨界点である。

略解 3 (1),(2) 略

(3) S^1 にパラメータ表示 $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ を与えると, 接空間は、

$$T_{(\cos\theta,\sin\theta)}S^1 = \mathbf{R}(-\sin\theta, \cos\theta)$$

となる. (正確には、このパラメータ表示は、2π 経つと元に戻るので、多様体の定義の第三番目のものと思うには、定義域を制限する必要がある。詳細は略。) このとき、S^1 の向きを $T_{(\cos\theta,\sin\theta)}S^1$ の基底として、 $(-\sin\theta, \cos\theta)$ を取るものとする。

このパラメータ表示のもとで f は、$\theta \mapsto n\theta$ である。よって微分 $T_{(\cos\theta,\sin\theta)}S^1 \to T_{(\cos n\theta,\sin n\theta)}S^1$ は、上の基底に関して表現行列を考えると、n である。

$n = 0$ のときは, $(1,0)$ 以外の点が正常値で、逆像は空集合だから、写像度は 0 である。

そこで, $n \neq 0$ として $(1,0) \in S^1$ の逆像を考える。n の絶対値を $|n|$ として逆像は $(\cos 2\pi k/|n|, \sin 2\pi k/|n|)$ $(k = 0, 1, \ldots, |n| - 1)$ と $|n|$ 個ある。微分が向きを保つかどうか考えると、表現行列が n であったことから、$n > 0$ のときは向きを保ち, $n < 0$ のときは向きを逆にする。したがって、写像度は n となる。

問題訂正. **問題 3**(3) の中に出てくる (1) はいうまでもなく、(2) の間違いである。

講評

- 概ね、10 点刻みで採点を行った。
- **問題 1** の陰関数定理において、$F(x, y) = 0$ を (ある条件下で) $y = f(x)$ と表すことができる、という形で書いている答案がいくつかあった。その場合、'表すことができる' の意味がはっきりしていること、すなわち、(x, y) の十分小さな開近傍 $U \times V$ において、$F(x, y) = 0$ であることと $y = f(x)$ となることが同値であること、が書いてあるかを見た。十分条件の「 $y = f(x)$ であれば, $F(x, y) = 0$」だけしか書いていないものは減点した。
- **問題 2** については、答えが正しく求まったものについては、途中の (1)~ (3) で少々おかしいところがあるものも目をつむることにした。
- **問題 3** について $n < 0$ の場合が考察されていない場合は減点した。