

数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2008年10月2日(木)

問題 写像 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を

$$(u, v) = f(x, y), \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

で定める. f の微分 Df を求め, それが可逆でないところを求めよ. また, 写像 f , もしくは各点ごとにその近傍に制限したものは全単射か?

略解

$$Df = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

よって $\det Df = e^{2x}$ であって、決して0にならず、 Df は常に可逆である。

f は $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ で、 y について周期的であるから全単射ではありえない。しかし、 Df が可逆であるので、逆関数定理によって、どんな点をでもその近傍に制限すれば全単射である。

もう少し考えると、 y について幅が 2π よりも小さい領域に制限すれば全単射であることは容易にわかる。