数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2008年12月4日(木)

問題　二次元球面 $S^2 = \{(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid a^2+b^2+c^2=1\}$ の 北極からの立体射影 $\varphi\colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbf{C}$

$$\varphi(a,b,c) = \frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c}$$

を考える. (i は虚数単位.) φ が全単射であることは断りなしに使ってよい. 複素数係数の n 次多項式 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ ($n \geq 1$, $a_i \in \mathbf{C}$, $a_n \neq 0$) に対して, 写像 $\widetilde{f}\colon S^2 \to S^2$ を

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(x) & x \text{ が北極でないとき} \\ \text{北極} & x \text{ が北極のとき} \end{cases}$$

で定義する. $\widetilde{f}$ が C^∞ 級写像であることは証明なしに使ってよい.

北極が $\widetilde{f}$ の臨界点であるための必要十分条件を求めよ.

略解　代数学の基本定理のときに授業でやった計算を思い出すと, $\widetilde{f}$ が $(0,0,-1)$ で微分が同型でないための必要十分条件は,

$$\left.\frac{d}{dz'}\left(\frac{z'^n}{\overline{a_n}+\overline{a_{n-1}}z'+\cdots+\overline{a_0}z'^n}\right)\right|_{z'=0}=0$$

となることである. 微分を計算してみると,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz'}\left(\frac{z'^n}{\overline{a_n}+\overline{a_{n-1}}z'+\cdots+\overline{a_0}z'^n}\right)\\&=\frac{nz'^{n-1}\left(\overline{a_n}+\overline{a_{n-1}}z'+\cdots+\overline{a_0}z'^n\right)-z'^n\left(\overline{a_{n-1}}+\cdots+n\overline{a_0}z'^{n-1}\right)}{\left(\overline{a_n}+\overline{a_{n-1}}z'+\cdots+\overline{a_0}z'^n\right)^2}\end{aligned}$$

であるから, $z'=0$ で 0 となる必要十分条件は $n\neq 1$ である.