

数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2008年12月11日(木)

問題 L, M, N は多様体で, $\dim M \leq \dim N$ であるとする. $f: L \rightarrow M, g: M \rightarrow N$ はともに C^∞ 級写像であるとする. $x \in L$ が f の臨界点であるとき, $g \circ f$ の臨界点でもあることを証明せよ. (線形代数の結果を用いるときは, **事実**とはっきり書いて明示すること. たとえば, 「**事実**. 行列 A が可逆である必要十分条件は, その行列式 $\det A$ が 0 でないことである」などのようにする.)

略解 $x \in L$ が f の臨界点であるから $\text{rank } df_x < \dim M$ である. したがって

$$\text{rank } d(g \circ f)_x = \text{rank } (dg_{f(x)}df_x) \leq \text{rank } df_x < \dim M \leq \dim N$$

であり, x は $g \circ f$ の臨界点でもある. ただし, 最初の不等号 \leq では「**事実**. $\text{rank } AB \leq \text{rank } B$ 」を用いた.