数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2008 年 12 月 18 日 (木)

問題　二次元球面 $S^2 = \{(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid a^2+b^2+c^2 = 1\}$ の北極からの立体射影 $\varphi\colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbf{C}$

$$\varphi(a,b,c) = \frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c}$$

を考える. (i は虚数単位.) φ が全単射であることは断りなしに使ってよい. 複素数係数の 1 次式 $f(z) = \alpha z + \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq 0$) に対して, 写像 $\widetilde{f}\colon S^2 \to S^2$ を

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(x) & x \text{ が北極でないとき} \\ \text{北極} & x \text{ が北極のとき} \end{cases}$$

で定義する. $\widetilde{f}$ が C^∞ 級写像であることは証明なしに使ってよい.

g をべつの一次式 $g(z) = \alpha' z + \beta'$ ($\alpha', \beta' \in \mathbf{C}$, $\alpha' \neq 0$) とするとき, $\widetilde{f}$ と $\widetilde{g}$ がホモトピックであることを示せ. また, $\alpha' = 0$ のとき, すなわち g が定数写像のときはホモトピックでないことを示せ.

略解　複素平面 $\mathbf{C}$ 内の α と α' を結ぶ曲線 $\alpha(t)$ で, 原点 0 を通らないものを取る. また, 複素平面 $\mathbf{C}$ 内の β と β' を結ぶ曲線 $\beta(t)$ も取る. このとき $f_t(z) = \alpha(t)z + \beta(t)$ として, $\widetilde{f_t}\colon S^2 \to S^2$ を考える. このとき $F(t,x) = \widetilde{f_t}(x)$ によって, $F\colon [0,1] \times S^2 \to S^2$ を定めれば, $\widetilde{f}$ が C^∞ 級であることの証明と同様にして, C^∞ 級であることが示される. よって f と g はホモトピック. (ここで $\alpha(t) \neq 0$ を使うことに注意.) また, g が定数写像のときは, 正則点の逆像の個数を考えると, f は 1 個, g は 0 個. 偶奇が異なるのでホモトピックでない.