数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2008 年 10 月 23 日 (木)

問題　授業で証明した陰関数定理は解析で通常出てくるものとは、すこし違った。通常出てくる次の定理について、授業のバージョンと同様に逆関数定理を用いて証明せよ。

$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ の点を $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, あるいはもっと簡単に (x, y) で表すことにする。

$U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ を点 (a, b) を含む開集合とし、$f\colon U \to \mathbf{R}^m$ を C^∞ 級写像とする。さらに $f(a, b) = 0$ とする。f の (a, b) における微分 $Df_{(a,b)}$ のうちの右側の $m \times m$ 個の成分を取った

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

が正則行列であると仮定する。このとき a を含む開集合 V, b を含む開集合 W で、$V \times W \subset U$ となるものであって、各 $x \in V$ に対して $f(x, g(x)) = 0$ となる $g(x) \in W$ がちょうど一つ存在するようにすることができる。またこのようにして決まる写像 $g\colon V \to W$ は C^∞ 級である。

略解　写像 $F\colon U \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ を $F(x,y) = (x, f(x,y))$ によって定める。すると F の点 (a,b) における微分 $DF_{(a,b)}$ は可逆である。よって逆関数定理から (a,b) を含む開集合 $U' \subset U$, $F(a,b) = (a,0)$ を含む開集合 $A \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ が存在して, $F|_{U'}\colon U' \to A$ は C^∞ 級微分同相となる。

このとき $\pi\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ を $\pi(x,y) = y$ によって定めれば、$g(x) = \pi \circ F^{-1}(x,0)$ が求める写像となる。あとは、開集合 V, W を題意を満たすように取れることを示せばよい。