数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2008 年 11 月 13 日 (木)

問題　$\mathbf{R}^3$ の点の座標を (x, y, z) で表すことにする．yz 平面 (すなわち $x = 0$) 内の円 $(y - 2)^2 + z^2 = 1$ を z 軸の周りに回転させてできる図形を M とする．(M が多様体であることは示さなくてもよい.) M 上の関数 $f \colon M \to \mathbf{R}$ を $f(x, y, z) = y$ で定義する．$df_p = 0$ となるような M の点 p をすべて求めよ.

略解　f の $\mathbf{R}^3$ への拡張 $\tilde{f}$ を $\tilde{f}(x, y, z) = y$ で定義する．$Df_p = (0, 1, 0)$．よって $df_p = 0$ となるのは接平面 T_pM が $\{\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \in T_p\mathbf{R}^3 \mid v_y = 0\}$ となるところである．さて，点 p が $(0, y, z)$ と yz 平面上にあって $(y-2)^2 + z^2 = 1$ を満たしているときは，接平面 T_pM は $v_y(y-2) + v_z z = 0$ である．このとき，求めるような点になっているのは $z = 0$, $y = 1$ または 3 のときである．また，p が $p_0 = (0, y_0, z_0)$ を z 軸の周りに回転させた点であるとするときには，接平面も $T_{p_0}M$ を回転させた平面である．(証明は略) これが $v_y = 0$ となるのは，p が yz 平面にあるときで，上にあげたものと，$y = -1$ もしくは -3 である．(全部で 4 点)