幾何学入門小テスト

担当: 中島 啓

2008 年 12 月 19 日 (金) 10:30　12:00 (90 分)

問題 1 n 次元球面 $\{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2 = 1\}$ 上の関数 $f(x_1,\ldots,x_{n+1}) = x_1^2+\cdots+x_m^2$ を考える. ただし, $m \le n$ とする. このとき, f の臨界点をすべて求めよ.

問題 2 $M \subset \mathbf{R}^n$ が C^∞ 級多様体のとき $TM \overset{\text{def.}}{=} \bigcup_{x\in M} T_xM = \{(x,v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mid x \in M, (x,v) \in T_xM\}$ が $\mathbf{R}^{2n}$ の中で多様体になることを証明せよ.

略解 1 S^n 上の関数 $f(x_1,\dots,x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots + x_m^2$ は, 右辺の式そのままで $\mathbf{R}^{n+1}$ 上の関数と思える. これも同じ f で表わす. その微分は

$$Df_{(x_1,\dots,x_{n+1})} = \begin{pmatrix} 2x_1 & \cdots & 2x_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる. 一方, 接空間 $T_{(x_1,\dots,x_{n+1})}S^n$ は

$$\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

で与えられ, $df_{(x_1,\dots,x_{n+1})}$ は $Df_{(x_1,\dots,x_{n+1})}$ の $T_{(x_1,\dots,x_{n+1})}S^n$ への制限である. これが 0 となるための必要十分条件は, $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{n+1} \end{pmatrix}$ と直交していれば, $\begin{pmatrix} 2x_1 & \cdots & 2x_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ とも直交するということだから,

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & \cdots & 2x_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{n+1} \end{pmatrix}$$

となる実数 λ が存在することに他ならない. これは

$$\begin{cases} x_1 = \cdots = x_m = 0 & (\lambda = 0) \\ x_{m+1} = \cdots = x_{n+1} = 0 & (\lambda = 2) \end{cases}$$

のいずれかである.

略解 2 $x \in M$ に対し、x を含む開集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ と C^∞ 級関数 $f\colon U \to \mathbf{R}^p$ で, Df_x が全射, $U \cap M = f^{-1}(0)$ となるものを取る。このとき $F\colon U \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$ を

$$F(x,v) = (f(x), Df_x v)$$

と定義する。すると, $F^{-1}(0) = TM \cap (U \times \mathbf{R}^n)$ であり, F の (x,v) における微分 $DF_{(x,v)}$ は, $(v', v'') \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ に対して

$$(Df_x v', D^2 f_x(v', v) + Df_x v'')$$

を対応させる線形写像である。ここで $D^2 f_x$ は f の x におけるヘッシアン行列 $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ である。Df_x が全射であるという仮定から、これも全射であり、したがって TM も多様体である。