幾何学 I テスト (7/25) 略解

略解 1. 演習問題 16

略解 2. 演習問題 28

略解 3. [坪井 I, 定理 6.4.1] 参照

略解 4. 演習問題 75 と 78

略解 5. (1) まず、$U = \{z \neq 0\}$ とし、非同次座標 (s,t) を (2) のように取ると、

$$U \cap M = \{(s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid t^2 = (s-a)(s-b)(s-c)\}$$

である。$\mathbf{R}^2$ 上の C^∞ 級関数 f を $f(s,t) = t^2 - (s-a)(s-b)(s-c)$ で定める。

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -(s-b)(s-c) - (s-a)(s-c) - (s-a)(s-b), \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 2t$$

である。$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ かつ $f = 0$ とすると、$t = 0$, $s = a$, b, または c である、このとき a, b, c が相異なることから、$\frac{\partial f}{\partial s} \neq 0$ である。したがって、$U \cap M$ が U の部分多様体であることが従う。

次に $z = 0$ とすると、式から $x = 0$ であり、したがって $y \neq 0$ に注意する。そこで、$V = \{y \neq 0\}$ の非同次座標を $S = x/y$, $T = z/y$ によって定める。すると、

$$V \cap M = \{(S,T) \in \mathbf{R}^2 \mid T = (S-aT)(S-bT)(S-cT)\}$$

である。$F(S,T) = T - (S-aT)(S-bT)(S-cT)$ とおく。

$$\left.\frac{\partial F}{\partial S}\right|_{S=T=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_{S=T=0} = 1$$

である。したがって、M は、$(S,T) = (0,0)$, すなわち $[0:1:0]$ の近傍でも部分多様体である。

(2) $f(s,t) = 0$ を微分すると

$$2tdt = \{(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b)\}ds \tag{0.1}$$

が成り立つ。$t = 0$, すなわち $s = a$, b, または c の近傍で $(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b) \neq 0$ に注意して、

$$\omega = \frac{ds}{t} = \frac{2dt}{(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b)}$$

が成り立つ。右辺は、$t = 0$ のところまで含めても C^∞ 級であるから、ω は U 上の C^∞ 級微分形式である。

(3) $S = s/t$, $T = t^{-1}$ に注意すると

$$dS = \frac{ds}{t} - \frac{sdt}{t^2}, \quad dT = -\frac{dt}{t^2}$$

となる。(0.1) を代入して

$$
\begin{aligned}
dS &= \frac{ds}{t}\left(1 - \frac{s}{2t^2}\{(s-b)(s-c)+(s-a)(s-c)+(s-a)(s-b)\}\right) \\
&= \frac{ds}{2t}\left(2 - \frac{1}{t^2}\{t^2+a(s-b)(s-c)+t^2+b(s-a)(s-c)+t^2+c(s-a)(s-b)\}\right) \\
&= -\frac{ds}{2t}\left(1 + \frac{1}{t^2}\{a(s-b)(s-c)+b(s-a)(s-c)+c(s-a)(s-b)\}\right)
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{ds}{t} \\
&= -\frac{2dS}{1+\frac{1}{t^2}\{a(s-b)(s-c)+b(s-a)(s-c)+c(s-a)(s-b)\}} \\
&= -\frac{2dS}{1+T^2\{a(\frac{S}{T}-b)(\frac{S}{T}-c)+b(\frac{S}{T}-a)(\frac{S}{T}-c)+c(\frac{S}{T}-a)(\frac{S}{T}-b)\}} \\
&= -\frac{2dS}{1+\{a(S-bT)(S-cT)+b(S-aT)(S-cT)+c(S-aT)(S-bT)\}}
\end{aligned}
$$

となる。これは、$S=T=0$ の近傍で微分可能な微分形式である。