

略解 61.

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

は, $d\omega_2 = (\operatorname{div} F) dx \wedge dy \wedge dz$ として現れる.

$$\operatorname{curl} F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

であるから, $d\omega_1$ の $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ 成分を取れば, $\operatorname{curl} F$ が現れる.

略解 62. (1) $\omega = d\theta$

(2) 直接計算してもチェックできるが、以下のように示すことができる。極座標 r, θ は θ が一意に定まらないので $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の座標ではないが、 θ の範囲を限定すれば、座標になる。したがって、極座標のもとで $d\omega = 0$ を証明すれば十分である。しかし、これは $d\omega = dd\theta = 0$ と示される。

(3) $\omega = dF$ とすると, (1) より, F と θ の差は定数である。ところが, θ は原点の回りを一周すると 2π ずれてしまうので, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の関数としては well-defined ではない。よって, このような F は存在しない。

略解 63. (1) 容易なので省略する。

(2) $L_X L_Y \alpha$ を計算すると次のようになる：

$$\begin{aligned} (L_X L_Y \alpha)(X_1, \dots, X_k) &= X((L_Y \alpha)(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k (L_Y \alpha)(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k) \\ &= XY(\alpha(X_1, \dots, X_k)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k X(\alpha(X_1, \dots, [Y, X_i], \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k Y(\alpha(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{i \neq j} \alpha(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, [Y, X_j], \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \alpha(X_1, \dots, [Y, [X, X_i]], \dots, X_k). \end{aligned}$$

上式最右辺の2行目にある項と3行目にある項は X と Y について対称的であり, $L_Y L_X \alpha$ を計算しても同じものが出てくる事が分かる。従ってこの部分は打ち消しあう。後は Jacobi の恒等式 $[[X, Y], X_i] = [X, [Y, X_i]] - [Y, [X, X_i]]$ に注意すれば, 求める等式が得られる。

(3-4) X の定める局所1パラメータ変換群を φ_t とする。このとき各点 $p \in M$ において

$$\left. \frac{d}{dt} (\varphi_t^* \alpha)_p(X_1, \dots, X_k) \right|_{t=0} = (L_X \alpha)_p(X_1, \dots, X_k)$$

が成立する。実際 $k = 2$ のときに左辺を計算すると, Leibniz 則を応用する事で

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t^* \alpha)_p(X_1, X_2) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \alpha_{\varphi_t(p)}((\varphi_t)_* X_1, (\varphi_t)_* X_2) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \alpha_{\varphi_t(p)}(X_1, X_2) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} \alpha_p((\varphi_t)_* X_1, X_2) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} \alpha_p(X_1, (\varphi_t)_* X_2) \right|_{t=0} \\ &= X_p(\alpha(X_1, X_2)) - \alpha_p(L_X X_1, X_2) - \alpha_p(X_1, L_X X_2) \end{aligned}$$

となる. $L_X X_i = [X, X_i]$ であるから, これは確かに $(L_X \alpha)_p(X_1, X_2)$ を与える. 一般の k でも同様に確かめられる.

今示した式を用いれば, (3) と (4) の証明は容易である. 実際

$$\begin{aligned}\varphi_t^*(\alpha \wedge \beta) &= (\varphi_t^* \alpha) \wedge (\varphi_t^* \beta), \\ d\varphi_t^* \alpha &= \varphi_t^* d\alpha\end{aligned}$$

の両辺を $t = 0$ で微分する事でそれぞれ (3), (4) が得られる. (1 行目の式の右辺を微分するとき Leibniz 則に注意する事.)

略解 64. (1) α が 0 次微分形式, すなわち関数の時は $i(X)\alpha = 0$ であるから問題の式は正しい. β が関数の時も同様にして確かめられる. そこで α, β 共に次数が正であるとする. まず前問の Lie 微分と異なり, 内部積 $i(X)\alpha$ が点 $p \in M$ で定める $T_p M$ 上の交代形式 $[i(X)\alpha]_p$ は, X_p と α_p のみで決まる事に注意する. 従って, (1) は α, β がそれぞれ 1 次微分形式の外積の形をしているときに確かめれば十分である. そこで $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l$ を 1 次微分形式とし, $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k, \beta = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_l$ とする. このときベクトル場 X_1, X_2, \dots, X_k に対し

$$\alpha(X_1, \dots, X_k) = \det(\alpha_i(X_j))_{1 \leq i, j \leq k}$$

となる事を小テストでやった. この式の右辺の行列式を第 1 列で展開すると,

$$\alpha(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \alpha_i(X_1) (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{i-1} \wedge \alpha_{i+1} \wedge \dots \wedge \alpha_k)(X_2, \dots, X_k)$$

が得られる. 右辺に現れる α_i だけ除いて外積を取った微分形式を $\alpha_{(i)}$ で表す事にすると, これは

$$i(X)\alpha = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \alpha_i(X) \alpha_{(i)}$$

となる事を意味する. この公式を α ではなく $\alpha \wedge \beta$ に適用すれば,

$$\begin{aligned}i(X)(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \alpha_i(X) \alpha_{(i)} \wedge \beta + \sum_{i=1}^l (-1)^{k+i-1} \beta_i(X) \alpha \wedge \beta_{(i)} \\ &= (i(X)\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i(X)\beta)\end{aligned}$$

となり, (1) が示された.

(2) 右辺を素直に計算すれば良い. 容易なので省略する.

(3) α が 0 次微分形式, すなわち関数の場合は, $L_X \alpha = X(\alpha)$ であり, また

$$i(X)d\alpha - di(X)\alpha = i(X)d\alpha = X(\alpha)$$

となる. 故に 0 次微分形式に対しては問題の式は正しい. 次に α の次数を $k > 0$ とする. こ

のとき

$$\begin{aligned}
(i(X)d\alpha)(X_1, \dots, X_k) &= d\alpha(X, X_1, \dots, X_k) \\
&= X(\alpha(X_1, \dots, X_k)) + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+2} X_i(\alpha(X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^k (-1)^{1+j+1} \alpha([X, X_j], \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{(i+1)+(j+1)} \alpha([X_i, X_j], X, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \\
&= (L_X \alpha)(X_1, \dots, X_k) \\
&\quad + \sum_{i=1}^k (-1)^i X_i \left((i(X)\alpha)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) \right) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} (i(X)\alpha)([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \\
&= (L_X \alpha)(X_1, \dots, X_k) - (di(X)\alpha)(X_1, \dots, X_k)
\end{aligned}$$

となり, 主張が示された.