略解 65. [松本, 問題 20.6] を見よ。

略解 66. S^n は局所座標系 (φ_+, U_+), (φ_-, U_-) で覆われていたので、その座標変換のヤコビ行列式はどちらも正もしくは負となっている。よって片方の座標の符号を適当に取り替えることにより向きを与える座標系を得る。

略解 67. (1) 略

(2) $\mathbf{R}P^2$ は $[-1,1] \times [-1,1]$ を境界を中心に点対称に貼り合わせることで得られる。特に、(開いた) メビウスの帯を開部分多様体として含んでおり、これは向き付け可能ではない。

略解 68. (1) **略解 33** のようにヤコビ行列をブロック表示する。

$$df_p = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

略解 **33** の計算より、$\det(df_p) = \det((A+\sqrt{-1}B)(A-\sqrt{-1}B))$ となり、$\det((A+\sqrt{-1}B)(A-\sqrt{-1}B)) = |\det(A+\sqrt{-1}B)|^2$ より常に非負であることが分かる。

(2) $\mathbf{C}P^n$ の座標系を**略解 4** のようにとる。(1) よりヤコビ行列式が非負であることが分かり、また座標変換であるからヤコビ行列式は 0 ではない。よって、$\mathbf{C}P^n$ は向き付け可能である。

略解 69. $F(x) = F(y)$ であるとする. どれかの $\rho_\alpha(x) \neq 0$ であるが, F の定義から $\rho_\alpha(y) \neq 0$ となる. すると $x, y \in U_\alpha$ である. このとき φ_α が U_α では座標であることから, 条件から $x = y$ である. F の微分が単射であることは容易に分かる.

略解 70. 略