**略解 29.** (1)(a)

$$df = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix}$$

である. $df = 0$ となるのは, $x = y = 0$ のみである. $f(C_f) = \{0\}$ である.

(b) $c \neq 0$ は臨界値でないから, $f^{-1}(c)$ は空集合でないとしたら部分多様体である. 空集合でないことも明らかである.

$f^{-1}(0)$ は $x$ 軸と $y$ 軸を合わせたものであり, 原点の回りで座標が取れない. 実際, 原点の回りの球との交わり $U = B_r(0) \cap f^{-1}(0)$ と $\mathbf{R}$ 内の開集合 $U'$ の間に同相写像 $\varphi\colon U \to U'$ があったと仮定しよう. すると, $U$ は連結で, $U \setminus \{0\}$ は 4 個の連結成分があるから, $U'$ も同じ性質をもつ. 最初の性質から $U$ は開区間であるが, 一個の点を除いても二つの連結成分にしか分かれないから矛盾する.

(2) $f$ の微分を計算すると, 点 $(x, y, z)$ において $df = [2x\ 2y\ -2z]$ となる. 従って $f$ の臨界点は原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ しかなく, そこでの $f$ の値（臨界値）は 0 である. 故に (1) と同様, 任意の 0 でない実数 $c$ に対し, $f^{-1}(c)$ は部分多様体となる（空集合でない事は容易に分かる）.

最後に $f^{-1}(0) = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \,\}$ を調べると, やはり (1) と同じく原点において局所座標を持たない事を証明できる. 証明の仕方は (b) と同様なので省略する.

**略解 30.** $m = n$ の場合は明らかであるから, $m < n$ の場合に証明する. 写像 $F : S^n \to \mathbf{R}^{m-n}$ を $F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_{m+2}, \ldots, x_{n+1})$ によって定義すれば, $S^m = F^{-1}(0)$ である. この $F$ が $F^{-1}(0)$ の各点 $p$ において, $p$ の近傍上 $C^\infty$ 級, かつ $dF_p$ が全射である事を示せば良い. そのために, 略解 1 で定義された $S^n$ の座標 $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ を用いる. $F^{-1}(0) \subset \bigcup_{i=1}^{m+1} U_i^+ \cup U_i^-$ となっている. $U_i^\pm$ $(1 \le i \le m+1)$ 上での $F$ の座標表示を計算すると,

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum y_\alpha^2}, y_i, \ldots, y_n)$$

であり, $i \le m+1$ であるから,

$$F \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (y_{m+1}, \ldots, y_n)$$

となる. これが $C^\infty$ 級, かつヤコビ行列が各点で全射である事は明らかである. 故に $F^{-1}(0) = S^m$ は部分多様体である.

**略解 31.** 一般に, 多様体の間の写像 $f : X \to Y$ が埋め込みであるならば, $f(X)$ は $Y$ の部分多様体で $f : X \to f(X)$ は微分同相写像である (授業で説明した). 今 $L$ には $M$ の部分多様体として自然に多様体の構造が入っている. 従って, $L$ が $N$ の部分多様体である事を示すには, 包含写像 $\iota : L \hookrightarrow N$ が多様体の間の写像として埋め込みになっている事を証明すれば良い.

$\iota$ は 2 つの包含写像 $\iota_L^M : L \hookrightarrow M, \iota_M^N : M \hookrightarrow N$ の合成であり, この 2 つの写像は仮定から埋め込みである. さて埋め込みとは (a) $C^\infty$ 級, (b) 微分が各点で単射, かつ (c) 像への同相写像であるような写像の事であった.

$\iota$ が (a), (c) を満たす事は $\iota_L^M, \iota_M^N$ がそれらを満たす事から明らかであり, また (b) も微分の合成則 $d\iota_x = (d\iota_M^N)_x \circ (d\iota_L^M)_x$ から従う. 故に $\iota$ は埋め込みである.

**略解 32.** 略解 31 で引用した定理より，$\Gamma_f$ が埋め込みである事を証明すれば良い． $\pi : \Gamma_f(M) \to M$ を第 1 成分への射影によって定義すると, これは連続な $\Gamma_f : M \to \Gamma_f(M)$ の逆写像を与える．従って $\Gamma_f$ は像への同相写像である．また $C^\infty$ 級である事も $f$ が $C^\infty$ 級である事から明らかである．点 $x \in M$ において微分を計算すると, 同一視 $T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \oplus T_yN$ により

$$(d\Gamma_f)_x(v) = v + df_x(v) \in T_{(x,f(x))}(M \times N) \quad (v \in T_xM)$$

と表される．右辺を 0 とおくと, 直和成分である $v$ も 0 となり, $(d\Gamma_f)_x$ が単射である事が示される．以上から $\Gamma_f$ は埋め込みである．

**略解 33.** $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i, f = u + \sqrt{-1}v$ と書き,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

とおく．すると Cauchy-Riemann の方程式から

$$df_p = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

となり, これを基本変形していくと

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A + \sqrt{-1}B & -B + \sqrt{-1}A \\ B & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A + \sqrt{-1}B & 0 \\ B & A - \sqrt{-1}B \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} A + \sqrt{-1}B & 0 \\ 0 & A - \sqrt{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_p & 0 \\ 0 & \overline{\partial f_p} \end{bmatrix}$$

となる．故に主張が示された．

**略解 34.** (1) たとえば $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] = [1 : -1 : 0 : \cdots : 0]$ は $M$ の点なので, $M$ は空集合でない．

$U_i = \{x_i \neq 0\}$ 上の非同次座標 $(y_0, \cdots, \widehat{y_i}, \cdots, y_n) = (x_0/x_i, \cdots, \widehat{x_i/x_i}, \cdots, x_n/x_i)$ を取る．$U_i \cap M$ は, $y_0^d + \cdots + \widehat{y_i^d} + \cdots + y_n^d + 1 = 0$ である．左辺を $f(y)$ とおくと,

$$df_y = \begin{bmatrix} dy_0^{d-1} & \cdots & \widehat{dy_i^{d-1}} & \cdots & dy_n^{d-1} \end{bmatrix}$$

である．$d = 1$ ならば, これは 0 とならないことは明らか．$d > 1$ のときは, $y_0 = y_1 = \cdots = \widehat{y_i} = \cdots = y_n = 0$ となるときに $df_y = 0$ となる可能性があるが, その点は, $f(y) = 0$ を満さないから $M$ 上の点ではない．よって, $U_i \cap M$ 上の任意の点で $df_y \neq 0$ を満たす．$i$ を動かして $M$ は部分多様体であることが分かった．

(2) $z_0$ を 1 の $d$ 乗根, $z_1$ を $-1$ の $d$ 乗根, その他の $z_i$ を 0 とおけば, $[z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$ は $M$ の点であるから, $M$ は空集合ではない．

$U_i$ と非同次座標 $y_i$ を上と同様に取り,

$$g(y) = y_0^d + \cdots + \widehat{y_i^d} + \cdots + y_n^d + 1$$

と定めれば, $M \cap U_i = g^{-1}(0)$ である. このとき**問題 33** により $dg_y$ が全射であることは $\partial g_y \neq 0$ と同値である. これは, (1) の計算において, $y_i$ を複素数と考えれば, そのまま成立する. よって $M$ は部分多様体である.

**略解 35.** (1) まず, 関係式 $x_i y_j = x_j y_i$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ には余分なものが多く含まれていることに注意する. 例えば $x_0 \neq 0$ とすると, $i = 0$ についての式から $y_j = x_j y_0 / x_0$ となるが, これが満たされていれば他の $i$ についても

$$x_i y_j = \frac{x_i x_j y_0}{x_0} = \frac{x_j x_i y_0}{x_0} = x_j y_i$$

と満たされる. よって満たされるべき式の数は ($i = 0$ の場合のみの)$n$ 個となる. ただし, $x_a \neq 0$ のときは, $i = a$ の場合の式の $n$ 個を取ってこなければいけないことには注意する必要がある.

$\mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1}$ の開集合 $U_a$ を $\{x_a \neq 0\}$ で定める. $U_a$ における座標 $\varphi\colon U_a \to \mathbf{R}^{2n+1}$ を

$$([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (y_0, \ldots, y_n)) \mapsto (x_0/x_a, \ldots, \widehat{x_a/x_a}, \ldots, x_n/x_a, y_0, \ldots, y_n)$$

で定める. 逆は

$$(w_0, \ldots, \widehat{w_a}, \ldots, w_n, y_0, \ldots, y_n) \mapsto \Bigl([w_0 : \cdots : \overset{i\,\text{番目}}{1} : \cdots : w_n], (y_0, \ldots, y_n)\Bigr)$$

である. また写像 $F\colon U_a \to \mathbf{R}^n$ を

$$F([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (y_0, \ldots, y_n)) = (y_0 - \frac{x_0 y_a}{x_a}, \ldots \widehat{y_a - \frac{x_a y_a}{x_a}}, \ldots, y_n - \frac{x_n y_a}{x_a})$$

で定義する. 始めに注意した通り $U_a \cap M = F^{-1}(0)$ である. すべての $a$ に対して $F$ の微分が全射であることをいえば, $M$ が部分多様体であることが従う. $F \circ \varphi^{-1}$ は

$$F \circ \varphi^{-1}(w_0, \ldots, \widehat{w_a}, \ldots, w_n, y_0, \ldots, y_n) = (y_0 - w_0 y_a, \ldots \widehat{y_a - w_a y_a}, \ldots, y_n - w_n y_a)$$

である. TeX できれいに書けないので微分の行列表示は省略するが,

$$\frac{\partial (F \circ \varphi^{-1})}{\partial y_i} = {}^t(0, \ldots, \overset{i\,\text{番目}}{1}, \ldots, \overset{a\,\text{番目}}{\text{除く}}, \ldots, 0) \quad (i \neq a)$$

から, 微分は全射である. 次元は $n+1$ である.

(2) $U_a \cap M$ において写像 $f$ の微分を考える. 接空間を上の $F \circ \varphi^{-1}$ の微分の kernel として計算してもよいが, $U_a \cap M$ において

$$\psi\left([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (y_0, \ldots, y_n)\right) = \Bigl(x_0/x_a, \ldots, \widehat{x_a/x_a}, \ldots, x_n/x_a, y_a\Bigr)$$

が座標になっていること (証明は略) を使う方が楽である.

$$f \circ \psi^{-1}(w_0, \ldots, \widehat{w_a}, \ldots, w_n, y_a) = \Bigl(w_0 y_a, \ldots, \overset{a\,\text{番目}}{y_a}, \ldots, w_n y_a\Bigr)$$

であり, その微分は

$$\begin{bmatrix} y_a & 0 & \dots & 0 & w_0 \\ 0 & y_a & \dots & 0 & w_1 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & 0 & y_a & w_n \end{bmatrix} \qquad \text{ただし } a \text{ 行目は } \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列式を計算すると, $a$ 行目を一番下にもっていけばすぐに分かるように, 微分が可逆でないのは $y_a = 0$ となる点である. $M$ の定義から他の $y_i$ もすべて $0$ となる. $a$ を動かして, 臨界点の集合は

$$\{([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (0, \ldots, 0)) \in M \subset \mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1}\}$$

である.

$f$ の逆像を考えよう. $(y_0, \ldots, y_n) \neq 0$ のときはその点を通る直線 (の定める一次元部分空間) が逆像で, 一点からなる. $(y_0, \ldots, y_n) = 0$ のときは射影空間 $\mathbf{R}P^n$ が逆像になる. つまり, $M$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点を射影空間 $\mathbf{R}P^n$ で置き換えてできる空間である. このような空間は ($\mathbf{R}^{n+1}$ の原点における)**blowup** と呼ばれる.

**略解 36.** $C^\infty$ 級写像

$$F \colon M(n, n; \mathbf{R}) \ni g \mapsto (g\,{}^t g \text{ の対角線より上の成分}) \in \mathbf{R}^{n(n+1)/2}$$

を考える。$g\,{}^t g$ が対称行列であることに注意し、上の $\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$ は対称行列の全体のなす空間と見なすことにする。すると、$O(n) = F^{-1}(I_n)$ である。

$F$ の微分を計算する。$g$ において $X$ 方向に微分すると

$$DF_g(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(g + tX) = X\,{}^t g + g\,{}^t X$$

となる。

対称行列の全体に内積を $(Y, Z) = \operatorname{tr}(YZ)$ で入れる。これは正定値な内積であることは容易にチェックできる。今、$g \in O(n)$ とし、上の $DF_g$ の像と対称行列 $Y$ が直交しているとする。すなわち

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{tr}((X\,{}^t g + g\,{}^t X)Y) = \operatorname{tr}(X\,{}^t g Y) + \operatorname{tr}({}^t(g\,{}^t X Y)) = \operatorname{tr}(X\,{}^t g Y) + \operatorname{tr}(Y X\,{}^t g) \\ &= 2 \operatorname{tr}(X\,{}^t g Y) \end{aligned}$$

がすべての $X$ について成り立つ。このときすぐに分かるように ${}^t g Y = 0$ となる。$g$ は可逆であるから、$Y = 0$ となる。したがって $dF_g$ は全射であり、$F^{-1}(I_n)$ は部分多様体となる。

上の計算により $T_{I_n} O(n) = \operatorname{Ker} DF_{I_n} = \{X \mid X + {}^t X = 0\}$ である。これは交代行列の全体である。