略解 54. 2 次微分形式同士の外積が可換である事と $dx_i \wedge dx_i = 0$ に注意すれば, 容易な計算で $\omega^n = n!\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$ となる事が確かめられる.

略解 55.

$$g(x,y) = \int_a^x f(x,y)dx$$

とおき、$\beta = g(x,y)dy$ とおけばよい。

略解 56. α は、k 次微分形式、β は l 次微分形式とする。$v_1, \ldots v_{k+l} \in T_pM$ に対し、

$$\begin{aligned}
&f^*(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) \\
&= (\alpha \wedge \beta)(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k), df_p(v_{k+1}), \ldots, df_p(v_{k+l})) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\alpha(df_p(v_{\sigma(1)}), \ldots, df_p(v_{\sigma(k)}))\beta(df_p(v_{\sigma(k+1)}), \ldots, df_p(v_{\sigma(k+l)})) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)(f^*\alpha)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})(f^*\beta)(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= (f^*\alpha \wedge f^*\beta)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l})
\end{aligned}$$

であるから主張が成り立つ。

略解 57. (1) S^2 は 2 次元多様体であるから全ての 3 次微分形式は 0 でなければならない. 故に $i^*(dx \wedge dy \wedge dz) = 0$ である.

(2) S^2 上の関数 $i^*(x^2 + y^2 + z^2)$ は恒等的に 1 であるから, 外微分を取る事によって, 各点 $p = (x, y, z) \in S^2$ において

$$x\, i^*dx + y\, i^*dy + z\, i^*dz = 0$$

となる. ここでもし $z = 0$ ならば, 上式により i^*dx と i^*dy は線型従属となり, 故に $i^*(dx \wedge dy) = 0$ となる. もし $z \neq 0$ ならば, 上式により i^*dz は i^*dx と i^*dy の線型結合で表される. $i^* : T_p^*\mathbf{R}^3 \to T_pS^2$ は埋め込み写像 i の微分の転置であるから全射で, 故に i^*dx と i^*dy は $T_p^*S^2$ の基底をなす事が分かる. よって $i^*(dx \wedge dy) \neq 0$ である.

略解 58. $\alpha = dg$ と書けたとする。よって $\int_{S^1} dg = g(1) - g(0)$ となる。g は S^1 上の関数であったから、特に $g(1) = g(0)$ であり、$\int_{S^1} \alpha = 0$ が分かる。また、逆に、$g(x) = \int_0^x f(x)dx$ と定めると、$\int_{S^1} \alpha = 0$ より、S^1 上の関数を定め、$\alpha = dg$ と書けることが分かる。

略解 59.

$$d\omega = \frac{\partial f(z)}{\partial y} dy \wedge dx + i\frac{\partial f(z)}{\partial x} dx \wedge dy$$

であるから、コーシー・リーマン方程式より結論を得る。

略解 60. (1) 略

(2) C_ε を $c(\theta) = (\varepsilon \cos\theta, \varepsilon \sin\theta)$ とパラメーター付けすると, c は反時計回りに C_ε を回るから,

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx = \int_0^{2\pi} \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c(\theta)) \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(c(\theta)) \sin\theta \right) d\theta = 2\pi$$

となる．

(3)C_ε が D の内部に含まれるように $\varepsilon > 0$ をとる．D' を D から C_ε の内部をとりのぞいた領域とする．D' に $\mathbf{R}^2$ の自然な向きから定まる向きを入れ，$\partial D'$ にはこの D' の向きから決まる向きをいれる．このとき，向き付き多様体として $\partial D' = C \sqcup (-C_\varepsilon)$ となる．ただし，$-C_\varepsilon$ は C_ε に (2) と逆の向きを与えたものである．ストークスの定理より，$\int_{\partial D} \alpha = 0$ となり，よって，

$$\int_C \alpha = \int_{C_\varepsilon} \alpha = 2\pi$$

となる．