幾何学I テスト

担当: 中島 啓

2012 年 7 月 25 日 (水) 10:30 〜 14:30

試験問題の略解は、試験終了後に

`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/12_Kika1.html`

を参照のこと.

問題 1. (1) n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n$ 上の関数

$$f([x_0 : \cdots : x_n]) = \frac{x_0^2}{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

が C^∞ 級であることを示せ.

(2) その微分 df_p が消えるような $p \in \mathbf{R}P^n$ をすべて求めよ. また, f の最大値, 最小値を求めよ.

問題 2. C^∞ 級多様体 X の部分多様体 Y, Z が、**横断的に交わる**とは、すべての $x \in Y \cap Z$ について $T_xY + T_xZ = T_xX$ が成立することである。このとき $Y \cap Z$ も、空集合でなければ、 X の部分多様体であることを示せ。

問題 3. コンパクトな多様体 M 上のベクトル場 X は完備であることを証明せよ。

問題 4. この問題では、体積要素が向きに適合した正規直交基底の取り方によらずに、定まることは証明なしに使ってよい。

M を $\mathbf{R}^3$ 内のコンパクトな領域で、境界 ∂M は 2 次元の C^∞ 級多様体になっているものを考える。$i\colon \partial M \to \mathbf{R}^3$ を埋め込み写像とする。M は、$\mathbf{R}^3$ の向きの制限として向きを入れ、∂M には、ストークスの定理 $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ が成立するように向きを入れる。

∂M に入る自然な向きと、$\mathbf{R}^3$ の計量からの制限によるリーマン計量によって、体積要素 dA を定義する。

(1) ∂M の外向き法ベクトル場 N を ∂M の近傍に拡張したとき、$i(N) dx \wedge dy \wedge dz$ を ∂M に引き戻したものが dA になることを示せ。

(2) $\mathbf{R}^3$ 上の三つの C^∞ 級関数の組み $F = (F_1, F_2, F_3)$ に対して、

$$\omega_2 = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

とおく。このとき、$i^*\omega_2 = (F, N) dA$ を示せ。ただし、(N_1, N_2, N_3) は、N の成分表示であり、$(F, N) = F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3$ と定める。

(3) 古典的なダイバージェンス定理

$$\int_M \operatorname{div} F dx dy dz = \int_{\partial M} (F, N) dA$$

を、ストークスの定理から導け。

問題 5. 実 2 次元射影空間 $\mathbf{R}P^2$ の同次座標を $[x:y:z]$ とする。a, b, c を相異なる 三つの実数として、$\mathbf{R}P^2$ の部分集合

$$M = \{[x:y:z] \in \mathbf{R}P^2 \mid zy^2 = (x-az)(x-bz)(x-cz)\}$$

を考える。

(1) M が、$\mathbf{R}P^2$ の部分多様体であることを証明せよ。(抽象的な多様体ではないことに注意)

(2) $U = \{z \neq 0\}$ における非同次座標 (s,t) を, $s = x/z$, $t = y/z$ によって定める。$(U \setminus \{t \neq 0\}) \cap M$ 上の微分形式

$$\omega = \frac{ds}{t}$$

を考える。ω は、$U \cap M$ 上の C^∞ 級微分形式に拡張されることを示せ。

(3) ω は、M 上の微分形式に拡張されることを示せ。