幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012 年 7 月 4 日 (水)

演習問題の略解は
`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/12_Kika1.html`
を参照のこと.

問題 65. (1) n 次元 C^∞ 級多様体 M 上に n 次微分形式 ω で、M 上のすべての点 p で、ω_p が 0 とならないものが与えられたとする。このとき、M 上に向きが次の条件を満すように与えられることを示せ。

向きを与える座標 $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to U'_\alpha$ によって $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$ と表わしたときに $f > 0$ となる。

(2) 逆に、M 上のに向きが与えられたとき、上の性質をみたすような、いたるところ 0 にならない n 次微分形式 ω が存在することを証明せよ。

問題 66. n 次元球面 S^n は向きづけ可能であることを証明せよ。

問題 67. (1) メビウスの帯が向きづけ可能でないことを証明せよ。
(2) 2 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^2$ は向きづけ可能でないことを証明せよ。
ヒント: $\mathbf{R}P^2$ は、メビウスの帯の端に円板を貼って得られることを、まず示せ。

問題 68. (1) **問題 33** の状況で、$n = m$ の場合を考え、写像 $f\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ は同じように各変数について正則であるとする。このとき、$z_j = x_j + iy_j$ によって $\mathbf{C}^n$ に座標を $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ によって入れる。このとき f のヤコビ行列の行列式が常に非負であることを証明せよ。
(2) 複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ が向きづけ可能であることを証明せよ。

問題 69. M をコンパクトな C^∞ 級多様体とし, M を覆う有限個の座標系 $\varphi_1\colon U_1 \to U'_1, \ldots, \varphi_N\colon U_N \to U'_N$ と, 開被覆 $U_1, \ldots, U_N$ に従属した 1 の分割 $\rho_1, \ldots, \rho_N$ を取る. このとき C^∞ 級写像

$$F(x) = (\rho_1(x), \rho_1(x)\varphi_1(x), \ldots, \rho_N(x), \rho_N(x)\varphi_N(x)) \in \mathbf{R}^{(n+1)N}$$

が M の $\mathbf{R}^{(n+1)N}$ への埋め込みであることを証明せよ.

定義 0.1 (1) 位相空間 X の**開被覆**とは、開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ であって、$X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ となるもののことをいう。

(2) 位相空間 X の二つの開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ が、次の関係を満たしているとき、$\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ は、$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の**細分**であるという。任意の V_β は、どれか一つの U_α に含まれる。

(3) 位相空間 X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が、**局所有限**であるとは、各点 $x \in X$ に対して、x を含む開集合 V が存在して、$V \cap U_\alpha \neq$ となる α が有限個しかないときをいう。

(4) 位相空間 X が**パラコンパクト**であるとは、X の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が、局所有限な細分 $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ を持つときをいう。

(5) 位相空間 X の局所有限な開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対して、連続関数の族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が、$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に従属した 1 の分割であるとは、次の条件を満たすときをいう。

(a) $f_\alpha \geq 0$

(b) 各 α に対して、$\operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$

(c) $\sum_\alpha f_\alpha = 1$

問題 70. 各自、パラコンパクトな C^∞ 級多様体の 1 の分割の存在について勉強せよ。