

幾何学I小テスト

担当: 中島 啓 TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012年4月11日(水)

問題 1. \mathbf{R}^n の開集合 U から、 \mathbf{R}^m への C^∞ 級写像 F に関する陰関数定理の主張を正確に書け。必要な条件も書くこと。

問題 2. (1) α, β, γ を相異なる実数とすると、 \mathbf{R}^2 内の曲線 $C: y^2 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ は、 \mathbf{R}^2 内の 1 次元多様体であることを示せ。

(2) C から \mathbf{R} への写像 π を $\pi(x, y) = x$ で定める。 π の微分が 0 となる点 (臨界点) をすべて求めよ。

時間があれば、 \mathbf{R} を C で置き換えたときに、どうなるかを考えよ。

略解 1. 略

略解 2. (1) $F(x, y) = y^2 - (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ とおく。微分 (ヤコビ行列) を計算すると

$$dF_{(x,y)} = \left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right] = [-(x - \beta)(x - \gamma) - (x - \alpha)(x - \gamma) - (x - \alpha)(x - \beta), 2y].$$

第二成分が 0 であり、かつ $F(x, y) = 0$ になるとすると、 $y = 0$ であるから $x = \alpha, \beta, \gamma$ のいずれかである。しかし、 α, β, γ は相異なるから、第一成分は 0 とならない。したがって、 dF は、 $F = 0$ 上で決して 0 にはならず、 C は多様体である。

(2) C の点 (x, y) における接空間は、 $\text{Ker } dF_{(x,y)}$ である。 π を \mathbb{R}^2 からの写像と思って微分を取ると、 $[1, 0]$ である。これの $\text{Ker } dF_{(x,y)}$ への制限が 0 になるときを考えればよい。それは、接空間がたてまっすぐ (もしくは、法ベクトル $dF_{(x,y)}$ が、ま横) になっているときであり、 $y = 0$ となるときに他ならない。($F = 0$ のグラフの概形を書いてみよ。) よって、 $x = \alpha, \beta, \gamma$ となり、三点ある。

C のときは、 $x = x_1 + \sqrt{-1}x_2, y = y_1 + \sqrt{-1}y_2$ として、実数で書き直すと、計算が大変になる。まず一般論として、このようにしてできるヤコビ行列を複素行列を使って適当に変換すると

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}} \end{bmatrix}$$

となることを用いるとよい。($\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ が $\begin{bmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\theta} \end{bmatrix}$ と対角化できることを思い出せ。) すると、 F は正則関数であることから、対角成分だけが残り、実数の場合と同じ計算でよいことが分かる。