幾何学I小テスト 第1回

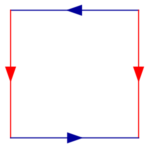
担当: 中島 啓　TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012年5月16日 (水) 午前10:30〜12:00

問題 1. $\mathbf{R}^2$ に次の同値関係 $\sim$ を入れる。

$$(x,y) \sim (x',y') \iff (x',y') = ((-1)^n(x+m), y+n) \text{ となる } m,n \in \mathbf{Z} \text{ が存在する.}$$

M を $\mathbf{R}^2$ を同値関係 $\sim$ で割ってできる位相空間とする。これは $N = [0,1] \times [0,1]$ の端を、下の図のようにはり合わせてできるクラインの壷と同じである。



(1) M に C^∞ 級多様体の構造を入れよ。

(2) $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $\tilde{f}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$\tilde{f}(x,y) = \sin 2\pi x \times \cos \pi y$$

で定める。$\tilde{f}$ は、M 上の関数 f を定めることと、C^∞ 級であることを示せ。

(3) $\tilde{F}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $\tilde{F}(x,y) = y$ によって定める。このとき、$F\colon M \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ を定めることを確かめ、それが C^∞ 級写像であることを示せ。

問題 2. M, N は、それぞれ m 次元、n 次元の C^∞ 級多様体であるとする。このとき、積多様体 $M \times N$ は $m+n$ 次元の多様体であった。π_1, π_2 を第一、第二成分への射影 $M \times N \to M$, $M \times N \to N$ とする。

(1) π_1, π_2 が C^∞ 級であることを示せ。また $(p,q) \in M \times N$ において、$i_q\colon M \to M \times N$, $j_p\colon N \to M \times N$ を $i_q(s) = (s,q)$, $j_p(t) = (p,t)$ によって定める。これも C^∞ 級であることを示せ。

(2) $(p,q) \in M \times N$ において、i_q, j_p の微分

$$d(i_q)_p\colon T_pM \to T_{(p,q)}(M \times N), \quad d(j_p)_q\colon T_qN \to T_{(p,q)}(M \times N)$$

を考える。このとき、$T_pM \oplus T_qN \to T_{(p,q)}(M \times N)$ を

$$v \oplus w \mapsto d(i_q)_p(v) + d(j_p)_q(w)$$

で定義する。これが線形空間の間の同型写像になっていることを示せ。