展望講義演習問題

中島 啓

1997 年 12 月 9 日 (火)

問題 1 $\varphi\colon V \to U \cap M$ と $\varphi'\colon V' \to U' \cap M$ を M の二つの local patch とするとき, $U \cap U' \cap M$ を通じた合成 $(\varphi')^{-1} \circ \varphi$ が微分可能であることを逆関数定理を用いて証明せよ.

問題 2 関数 $z = f(x, y)$ のグラフの平均曲率は,

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)\right]$$

で与えられることを証明せよ. 但し, $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ である.

問題 3 関数 $z = f(x, y)$ のグラフが極小曲面であり, さらにある関数 $g(x)$, $h(y)$ によって $f(x, y) = g(x) + h(y)$ と書けているとする. このとき, この極小曲面は, 平面か Scherk の曲面 (図 1) の一部であることを証明せよ.

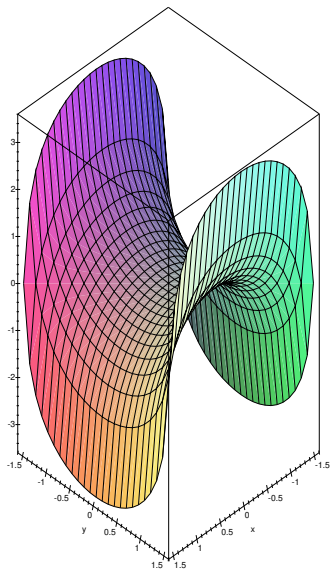

Figure 1: Scherk の曲面

問題 4 $x = f(z)$ のグラフを z 軸の回りに回転させて出来る図形が極小曲面であるとき, それは catenoid(図 2) の一部であることを証明せよ.

参考:

http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/tenbou.html

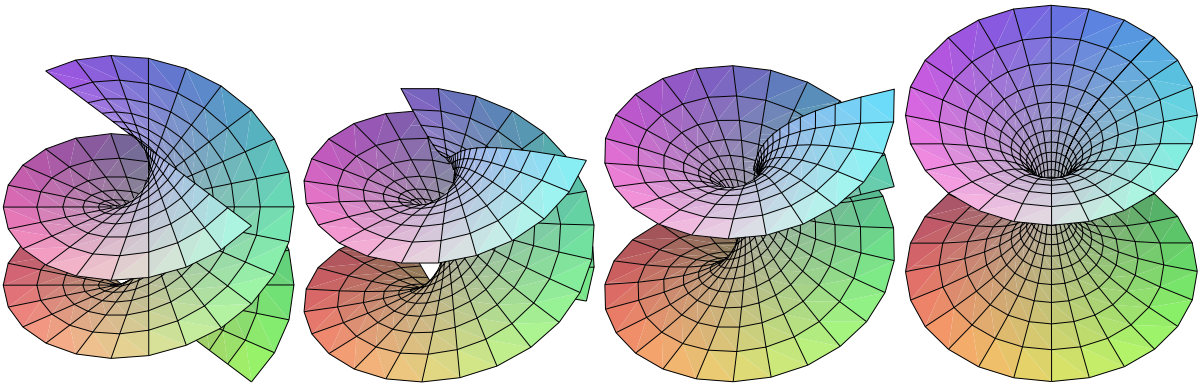

Figure 2: Helicoid から Catenoid への変形

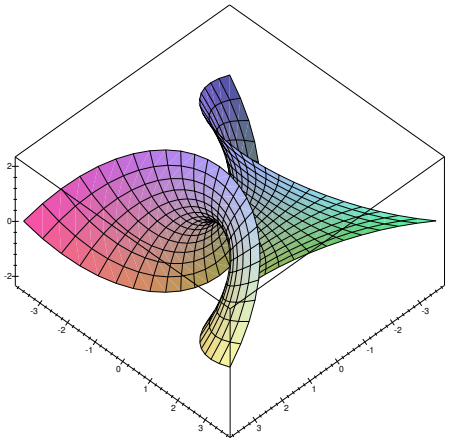

Figure 3: Enneper の曲面