展望講義演習問題

中島 啓

1997 年 12 月 16 日 (火)

問題 **5** $\varphi\colon V \to U \cap M$ を local patch とし, E, F, G を授業でやったように定める (i.e. 第一基本形式). f を M 上の C^∞ 級関数とするときに,

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{EG - F^2}\left\{(G\frac{\partial f}{\partial u} - F\frac{\partial f}{\partial v})\frac{\partial}{\partial u} + (-F\frac{\partial f}{\partial u} + E\frac{\partial f}{\partial v})\frac{\partial}{\partial v}\right\}$$

となることを証明せよ.

問題 **6** X と V が M 上のベクトル場である (i.e. X, V 共に M に接している) ときに,

$$\nabla^N_V X = (X, S(V))N \qquad \text{(ガウスの方程式)}$$

を証明せよ.

問題 **7** M を $\mathbb{R}^3$ 内のコンパクトで境界 ∂M を持つ向きのついた曲面とする. X を M 上のベクトル場 (i.e. 各点 $p \in M$ 毎に, $X(p)$ は接空間 T_pM に入っている), dA を面積要素, n を∂M の外向き法線ベクトル, $d\sigma$ を ∂M の線要素とするときに,

$$\int_M \operatorname{div} X dA = \int_{\partial M} (X, n) d\sigma$$

を多様体上の Stokes の定理を用いて証明せよ.
　但し, 授業でやった $\operatorname{div} X$ 以外の定義を用いるとき (例えば, [松島] の p.266 のもの) は, その定義と授業の定義が同じであることも証明すること.

問題 **8** M が $\mathbb{R}^3$ 内の向きの付けられたコンパクトな曲面であるとする. M が極小曲面になることはありえないことを証明せよ.

参考文献:

- 松島与三: 多様体入門

演習問題は, ホームページ

`http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/tenbou.html`

においてあります.