L^2-methods in complex differential geometry

辻　元

2003. 11

この講演では、最近発展が著しい、乗数イデアル層の理論を紹介し、その理論の応用についてお話したいと思います。　この理論の主な応用の場は現在のところ複素代数多様体論ですが、高次元の代数多様体論では実例の計算が極めて困難であるために、やや抽象的な一般論を展開するのが精一杯の状況です。従ってこれからお話しする内容についても、即座にお役に立つことはないと思われますが少しでも関心を持って頂けたら幸いです。特に、若い研究者の方には、未解決の巨大な問題があり。　これらを解決するのは我々の使命であることを認識して頂けたらと思います。但し、あまり部分的な小さな問題のない分野なので、悲惨な将来を迎えたとしても保障できないことを予めおことわりしておきます。

1　乗数イデアル層の定義

X を複素多様体、L をその上の正則直線束とする。　h が L の特異エルミート計量であるとは、

$$h = e^{-\varphi} \cdot h_0$$

h_0: L の C^∞ エルミート計量,
$\varphi \in L^1_{loc}(X)$
となることである。(L, h) を特異エルミート直線束といい、その曲率カレント Θ_h が

$$\Theta_h := \Theta_{h_0} + \partial\bar{\partial}\varphi$$

で定義される。このとき

$$\mathcal{I}(h)(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid\mid f\mid^2 \cdot e^{-\varphi} \in L^1_{loc}(U)\}$$

で定義されるイデアル層を h の乗数イデアル層という。乗数イデアル層は φ が概多重劣調和関数であるとき（即ち、連続関数と多重劣調和関数の和として表されるとき）連接層であることが知られている

Theorem 1.1 *(Nadel [11])* X をコンパクト複素多様体、(L,h) を特異エルミート直線束で Θ_h が真に正（すなわち適当なケーラー形式より大きい）とする。このとき

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(K_X+L)\otimes\mathcal{I}(h)) = 0$$

が全ての $q \geqq 1$ について成り立つ。

この定理は Hörmander の L^2-評価式から自然に証明できるが、このような定式化が後の発展に大変役に立った。

1.1 基本性質

Proposition 1.1 *(*上半連続性）$\varphi \in PSH(\Delta^n \times \Delta)$ とする。$x \in \Delta^n$ とする。$\Delta^n(t) := \Delta^n \times \{t\}$ とおく。$t \in \Delta^*$ に対して

$$\mathcal{I}(e^{-\varphi}\mid_{\Delta^n(t)})_x \neq \mathcal{O}_{\Delta^n(t),x}$$

なら

$$\mathcal{I}(e^{-\varphi}\mid_{\Delta^n(0))})_x \neq \mathcal{O}_{\Delta^n(0),x}$$

である。

([5] 劣加法性) この命題は L^2-拡張定理 ([13]) から直に従う。また次の命題も同様に示される。

Theorem 1.2 $\varphi, \psi \in PSH(\Delta^n)$ とすると

$$\mathcal{I}(e^{\varphi+\psi}) \subseteq \mathcal{I}(e^{-\varphi})\cdot\mathcal{I}(e^{-\psi})$$

である。

2 大域切断の存在定理

特異エルミート計量の応用については、K_X+L（このような形の束を随伴直線束 (adjoint line bundle) という）の形の直線束における、求める条件を満たす大域切断の存在問題がある。特に次の予想はよく知られている。

Conjecture 1 *(*藤田予想*)* X を n 次元非特異射影代数多様体、L をその上の豊富な直線束とする。このとき全ての $m \geqq n+1$ について $\mid K_X+mL\mid$ は底点を持たない。

この種の問題に乗数イデアルの理論を用いるには (mL, h) が真に正の曲率を持つ特異エルミート直線束としたとき

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + mL)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + mL) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h))$$

が全射であることに注意すると、　$\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h))$ が問題としている点で、孤立点になっているかどうかが重要である。たとえば、$x \in X$ で $\mid K_X + mL \mid$ が自由であるには mL の特異エルミート計量 h で

1. $\Theta_h > 0$,
2. $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h))$ は x で孤立している。

という 2 条件を満足する特異エルミート計量 h を構成すればよい。このための条件は例えば次で与えられる。

Theorem 2.1 *([1, 16])* X を n 次元、非特異代数多様体、L をその上の豊富な直線束とする。$x \in X$ に対し

$$\mu_r(L, x) = \min\{L^r \cdot V \mid V\!: \textit{r-dimensional subvariety} \;\; x \in V\}$$

とおく。　このとき　全ての

$$m > \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{\sqrt[r]{\mu_r(L, x)}}$$

に対して $\mid K_X + mL \mid$ は x で底点を持たない。

この種の問題を解くには、次のような特異エルミート計量の構成をする。

$$\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(mL))$$

に対して

$$h = \frac{1}{\mid \sigma \mid^{\frac{2}{m}}}$$

とおく。　x で高い特異性を持たせるには σ が x で高い位数で消えていると都合がよい。　どのくらいの位数で消せるかというのが Siegel の議論で m が十分大きいとき大体

$$\frac{m}{\sqrt[n]{\mu_n}}$$

の位数で消せると言う訳である。h は勿論、x 以外でも特異性を持つわけであるが、m が大きいと特異性は小さいと期待される。それでも、どうしても x 以外での特異性が無視できないとなれば、帰納法というわけで上のような数字が出てくるわけである。ここで出てきた μ_r は全て正整数であるが、これは L が豊富だと仮定しているからで、後の交叉理論の節で述べるように L が特異エルミート束の場合には実数になる。

ここでは述べないが、X が非コンパクトのときは μ_r が無限大となることがあり、このときには面白い応用が知られている。

3 AZD

前節で述べたように、豊富束の随伴直線束については、一応の対処法があり、十分とは言えないまでも、一定の成果が得られた。　しかし、豊富とは限らない一般の直線束に対して何らかの結果を得ることは重要であることは多い。たとえば、高次元において、一般型代数多様体の中で、豊富な標準束を持つものはそれをたとえ、その双有理モデルで置き換えることを許したとしても極めて小さい集合にしかならない。このような事情を克服するために考えられたのが AZD(解析的 Zariski 分解) である。複素多様体上の直線束は、それが半正の曲率を持つ特異エルミート計量を許容するとき、擬正であると言われる。　これは射影代数多様体上の直線束に対しては、その Chern 類が、有効錐の閉包に属することと同値である。特にその正のテンソル積が正則切断を持てば、擬正である。

Theorem 3.1 （*[16, 17])* X を非特異射影代数多様体、L をその上の擬正直線束とする。　このとき L の特異エルミート計量で次の条件を満足するものがある*:*

1. $\Theta_h \geqq 0$,
2. $H^0(X, \mathcal{O}_X(mL) \otimes \mathcal{I}(h^m)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(mL))(\forall m \geqq 1)$.

実は、直線束が擬正であることと AZD を持つことは同値である。このような AZD の構成は、例えば次のようになされる。

X, L を定理のものとする。　さて A を十分正な直線束とする。　h_0 を L の滑らかなエルミート計量とする。　また h_A を A の正の曲率をもつ滑らかなエルミート計量とする。X にケーラー計量 g を定めておく。このとき

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(mL + A))$$

の $h_A h^m, g$ に関する正規直交基底を

$$\{\phi_0^{(m)}, \dots, \phi_{N(m)}^{(m)}\}$$

として、

$$K_m := \sum_{j=0}^{N(m)} \mid \phi_j^{(m)} \mid^2$$

とおくと、

$$h_\infty := (\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{K_m})^{-1}$$

とおくとこれが、AZD である。

4　特異エルミート直線束の交叉理論

この節では、擬正な特異エルミート直線束の交叉理論を考える。X を n 次元コンパクト複素多様体、(L,h) を擬正な特異エルミート直線束とする。便宜上、h の重み関数は上半連続としておく（これは常に仮定しておいて一般性を失わない)。

$$(L,h)^n := n!\limsup_{m\to\infty} m^{-n}\dim H^0(X,\mathcal{O}_X(mL)\otimes\mathcal{I}(h^m))$$

で定義する。　また Y を X の r 次元代数部分多様体とするとき

$$(L,h)^r\cdot Y := r!\limsup_{m\to\infty} m^{-r}\dim H^0(Y,\mathcal{O}_X(mL)\otimes\mathcal{I}(h^m)/\mathrm{tor})$$

で定義する。 このように定義しておくと $(L,h)\mid_Y$ が定義されない場合も定義できて都合がよい。$(L,h)\mid_Y$ が定義できる場合には

$$(L,h)^r * Y := r!\limsup_{m\to\infty} m^{-r}\dim H^0(Y,\mathcal{O}_X(mL)\otimes\mathcal{I}(h^m\mid_Y))$$

と置くことも出来る。　しかし、このように定義しても本質的には変わらない。

この交叉理論に関して次の結果が得られる。

Theorem 4.1 *([18])* (L,h) を非特異射影代数多様体 X 上の擬正特異エルミート直線束とする。このとき有理ファイブレーション

$$f : X - \cdots \to Y$$

が一意的に存在し、

1. F を一般ファイバーとすると $(L,h)\mid_F$ は数値的に自明。
2. f はこのようなファイブレーションの中で $\dim Y$ が最大。
3. 一般の多重切断上 (L,h) は数値的に正。

このファイブレーションを数値的自明ファイブレーション (numerically trivial fibration) という。

Theorem 4.2 *([24])(非消滅定理)* X を非特異代数多様体、(L,h) を擬正特異エルミート直線束とする。A を X 上の豊富な直線束とする。このとき次のいずれかが成り立つ。

1. (L,h) に付随する自明でない数値的自明ファイブレーションが存在する。

2. $H^0(X,\mathcal{O}_X(K_X+A+mL)\otimes\mathcal{I}(h^m))\neq 0$ が十分大きな全ての $m>0$ について成り立つ。

5　正則切断の拡張定理

切断の拡張という観点では、L^2-拡張定理 ([13]) が基本的である。しかし、それを多重随伴束の場合に拡張すると面白い応用がある。

5.1　劣随伴定理 (原始型）

M を複素多様体 L を M 上の正則直線束、S を M の複素部分多様体とする。

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(L)) \to H^0(S, \mathcal{O}_S(L))$$

が全射かどうかは複素多様体論において、基本的な問題である。この節では、幾何学的な条件の下でこの問題を考えよう。正確に結果を述べよう。

M を n 次元複素多様体、S を M の閉部分多様体とする。このとき次のような関数 $\Psi : M \longrightarrow [-\infty, 0)$ を考える。

1. $\Psi^{-1}(-\infty) \supset S,$
2. S が x の近傍で k-次元であるとする。x の近傍の局所座標 $(z_1, \ldots, z_n)$ で $z_{k+1} = \cdots = z_n = 0$ が $S \cap U$ が成り立つものをとると

$$\sup_{U \setminus S} \mid \Psi(z) - (n-k) \log \sum_{j=k+1}^{n} \mid z_j \mid^2 \mid < \infty$$

が成り立つ。

このような関数 Ψ の集合を $\sharp(S)$ で表す。

各 $\Psi \in \sharp(S)$ に対して S 上の正測度 $dV_M[\Psi]$ を次のような測度 $d\mu$ のなす半順序集合の最小元として定義される、

$$\int_{S_k} f d\mu \geq \limsup_{t \to \infty} \frac{2(n-k)}{\sigma_{2n-2k-1}} \int_M f \cdot e^{-\Psi} \cdot \chi_{R(\Psi,t)} dV_M$$

が、$\operatorname{supp} f \subset\subset M$ を満たす全ての非負連続関数 f について成立する。ここで S_k は S の k-次元成分を表し、σ_m は $\mathbf{R}^{m+1}$ 内の単位球面の体積を、$\chi_{R(\Psi,t)}$ は

$$R(\Psi, t) = \{x \in M \mid -t-1 < \Psi(x) < -t\}$$

の特性関数を表す。

Theorem 5.1 M を複素多様体、dV_M をその上の連続な体積形式、L を M 上の直線束で、h_L をその上の C^∞-エルミート計量、 S を M のコンパクト複素部分多様体とする。$\Psi : M \longrightarrow [-\infty, 0)$ を連続関数、 K_M を M の標準束とする。

以下の条件を仮定する。

1. 閉集合 $X \subset M$ で

(a) X は局所 L^2-正則関数に関して *negligible i.e.,* 任意の局所座標 $U \subset M$ と $U \backslash X$ 上の L^2-正則関数 f に対して、U 上の正則関数 $\tilde{f}$ で $\tilde{f} \mid U \backslash X = f$ を満たすものがある。

(b) $M \backslash X$ はスタイン多様体で S の各既約成分と交わる。

2. $\Psi \in \sharp(S) \cap C^{\infty}(M \backslash S)$,

3. ある正数 $\delta > 0$ が存在して全ての $\epsilon \in [0, \delta]$ に対して $\Theta_{h \cdot e^{-(1+\epsilon)\Psi}} \geq 0$ が成立する。

4. M 上に正の直線束が存在する。

このとき $H^0(S, \mathcal{O}_S(m(K_M + L)))$ の全ての元は $H^0(M, \mathcal{O}_M(m(K_M + L)))$ の元へ拡張できる。

5.2 多重種数の変形不変性

上の劣随伴定理から、直ちに次が得られる。

Theorem 5.2 $\pi : X \longrightarrow \Delta$ を単位円板 Δ 上の滑らかな射影射とする。このとき $X_t := \pi^{-1}(t)$ の多重種数

$$P_m(X_t) := \dim H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(mK_{X_t}))$$

は全ての正整数 m に対して $t \in \Delta$ に依らない。

実際 $\Psi = 2\pi^* \log \mid z - t \mid$ と置けばよい。特に小平次元は変形不変である。

5.3 劣随伴定理（一般型）

M を複素多様体 (L, h_L) を M 上の特異エルミート直線束で M 上 $\Theta_{h_L} \geq 0$ となるものとする。dV を M 上の C^{∞}-体積形式とする。$\sigma \in \Gamma(\bar{M}, \mathcal{O}_{\bar{M}}(m_0 L) \otimes \mathcal{I}(h))$ を大域切断とする。α を正の有理数 ≤ 1、S を M の既約部分多様体で、$(M, \alpha(\sigma))$ が S の生成点上対数的標準かつ KLT(川又対数標準) でなく、全ての $0 < \epsilon << 1$ に対して $(M, (\alpha - \epsilon)(\sigma))$ は S の生成点上、 KLT となるものとする。

$$\Psi = \alpha \log h_L(\sigma, \sigma).$$

とおく。このとき S 上の特異体積形式 $dV[\Psi]$ が自然に定まる。実際 $f : N \longrightarrow M$ を $(X, \alpha(\sigma))$ の対数解消とする。このとき $f^{-1}(S)$ の各因子成分上の体積形式 $f^*dV[f^*\Psi]$ が留数として定まる。$dV[\Psi]$ は $f^*dV[f^*\Psi]$ のファイバー積分として定まる。$d\mu_S$ を S 上の C^{∞}-体積形式 φ を S 上の関数で

$$\varphi := \log \frac{dV[\Psi]}{d\mu_S}$$

で定まるものとする。d を $d > \alpha m_0$ を満たす正整数とする。

Theorem 5.3 M,S,Ψ を上のものとする。　このとき全ての

$$A^2(S, \mathcal{O}_S(m(K_M + dL)), e^{-(m-1)\varphi} \cdot dV^{-m} \otimes h_L^m, dV[\Psi])$$

の元は

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(m(K_M + dL))).$$

の元に拡張可能。

Corollary 5.1 *([20])* $\pi : X \longrightarrow \Delta$ を半安定退化とする。$X_0 = \pi^{-1}(0) = \sum_i D_i$ を既約分解とすると

$$\sum_i P_m(D_i) \leq P_m(X_t)$$

が全ての π の正則値 t について成立する。ここで P_m は m-多重種数をあらわす。

6　標準環の構造

X を非特異代数多様体 K_X

$$R(X, K_X) := \oplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$$

を標準環という。　標準環に関しては次の予想が重要である。

Conjecture 2 非特異代数多様体の標準環は有限生成である。

この予想については、次の事実が Wilson により指摘されている。

Theorem 6.1 X を非特異代数多様体とする。　$R(X, K_X)$ が有限生成であることとある整数 $m \geqq 1$ が存在して、$\mu : Y \longrightarrow X$ を $\mid mK_X \mid \neq \emptyset$ の底点解消とするとき、$\mu^* \mid mK_X \mid$ の固定成分は全てブローダウンされることは同値である。

これに関連して、次の定理が得られる。

Theorem 6.2 *([24])* X を一般型代数多様体とする。　h を K_X の AZD とする。このとき、$\mid mK_X \mid$ の安定固定成分は (K_X, h) に関する自明でない数値的自明ファイブレーションを持つ。

他にも述べ切れなかった応用は多い。　しかしあまり長いアブストラクトを書くのも良くないのでここでお仕舞いにする。

参考文献

[1] U. Anghern-Y.-T. Siu, Effective freeness and point separation for adjoint bundles, Invent. Math. 122 (1995), 291-308.

[2] E. Bombieri, Canonical models of surfaces of general type, Publ. I.H.E.S. 42 (1972), 171-219.

[3] J.P. Demailly, A numerical criterion for very ample line bundles, J. Diff. Geom. 37 (1993), 323-374.

[4] J.P. Demailly, Regularization of closed positive currents and intersection theory, J. of Alg. Geom. 1 (1992) 361-409.

[5] Demailly, Jean-Pierre; Ein, Lawrence; Lazarsfeld, Robert A subadditivity property of multiplier ideals. Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday. Michigan Math. J. 48 (2000), 137–156.

[6] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables 3-rd ed.,North-Holland(1990).

[7] Y. Kawamata, Subadjunction of log canonical divisors II, alg-geom math.AG/9712014, Amer. J. of Math. 120 (1998),893-899.

[8] Y. Kawamata, Fujita's freeness conjecture for 3-folds and 4-folds, Math. Ann. 308 (1997), 491-505.

[9] Y. Kawamata, Semipositivity, vanishing and applications, Lecture note in School ON VANISHING THEOREMS AND EFFECTIVE RESULTS IN ALGEBRAIC GEOMETRY (ICTP, Trieste, May 2000).

[10] J. Kollár- S. Mori, Birational geometry of algebraic varieties, Cambridge Tracts in Math., Cambridge University Press (1998).

[11] A.M. Nadel, Multiplier ideal sheaves and existence of Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, Ann. of Math. 132 (1990),549-596.

[12] N. Nakayama, Invariance of plurigenera of algebraic varieties, RIMS preprint 1191, March (1998).

[13] T. Ohsawa and K. Takegoshi, L^2-extension of holomorphic functions, Math. Z. 195 (1987),197-204.

[14] T. Ohsawa, On the extension of L^2 holomorphic functions V, effects of generalization, Nagoya Math. J. (2001) 1-21.

[15] G. Tian, On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds, Jour. Diff. Geom. 32 (1990),99-130.

[16] H. Tsuji, Analytic Zariski decomposition, Proc. of Japan Acad. 61(1992) 161-163.

[17] H. Tsuji, Existence and Applications of Analytic Zariski Decompositions, Trends in Math. Analysis and Geometry in Several Complex Variables, (1999) 253-272.

[18] H. Tsuji, Numeircally trivial fibrations, math.AG/0001023(2000).

[19] H. Tsuji, On the structure of pluricanonical systems of projective varieties of general type, preprint (1997).

[20] H. Tsuji, Global generation of adjoint bundles, Nagoya Math. J. 142 (1996),5-16.

[21] H. Tsuji, Deformation invariance of plurigenera, Nagoya Math. J. 166 (2002), 117-134.

[22] H. Tsuji, Subadjunction theorem for pluricanonical divisors, math.AG/0111311 (2001, to appear.

[23] H. Tsuji, Pluricanonical systems of projective 3-folds of general type, preprint (2002).

[24] H. Tsuji, Finite generation of canonical ring, in preparation.