ホモロジー的ミラー対称性の諸相

深谷賢治

平成 15 年 10 月 8 日

目次

§1 擬正則曲線[1]からホモロジー的ミラー対称性まで

始めに，擬正則曲線やミラー対称性について，多くの概説に述べられていることを繰り返す.（たとえば，[Fu7],[Yau], [VZ] など参照.）それらのことについての知識がある人は飛ばしてかまわない.

定義 1. シンプレクティック多様体とは，多様体[2] M とその上の 2 次微分形式 ω の組であって，$d\omega = 0$, $\omega^n \neq 0$（決して 0 にならない）なるものを指す.（$2n$ は M の次元.）

シンプレクティック多様体についての，次の 2 つの基本定理を述べておく.

定理 1.（Darboux） シンプレクティック多様体 (M, ω) は局所的には自明. すなわち，任意の点 $p \in M$ に対して，その近傍 U_p と，$\varphi : U_p \to \mathbb{C}^n$ なる中への微分同相写像で，$\varphi^*\omega_0 = \omega$ なるものがある. ここで ω_0 は $\sum dx^i \wedge dy^i$ である.（$z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$ が複素座標.）

[1] pseudoholomorphic curve の訳語は，深谷はしばしば「概正則曲線」を用いてきたが，他の人はほとんど擬正則曲線を用いているようなので，今後はそちらにしたい.

[2] 以後多様体などは，断らない限り常に C^∞ 級とする.

定理 2.（Moser）　（境界の無いコンパクト）シンプレクティック多様体の変形で，シンプレクティック形式を変えないものは自明である．すなわち，シンプレクティック多様体の族 (M, ω_t) で，$[\omega_t] \in H^2(M; \mathbb{R})$ が t によらないものに対して，$\varphi_t : M \to M$ なる微分同相写像の滑らかな族で，$\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ なるものがいつも存在する．

この 2 つが基本定理であるが，1970 年代初頭ぐらいまでは，これを超えて多くがわかっていたわけではない．たとえば，次のことはわかっていなかった．

「同一の多様体 M 上の 2 つのシンプレクティック構造 ω_1, ω_2 があって，$[\omega_1] = [\omega_2] \in H^2(M; \mathbb{R})$ となるとき，$\varphi : M \to M$ なる微分同相写像で，$\varphi^* \omega_2 = \omega_1$ なるものはあるか？」

次の Gromov の結果がはじめての例である．$\mathbb{C}^2$ に $\omega_0 = dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2$ なるシンプレクティック構造を考える．$D^2(r) = \{z \in \mathbb{C} | |z| < r\}$ とおく．

定理 3.（Gromov，圧縮不能性定理の一例）　$M_1 = D^2(2) \times D^2(1/2)$，$M_2 = D^2(1) \times D^2(1)$ とするとき，$\varphi : M_1 \to M_2$ なる微分同相で，$\varphi^* \omega_0 = \omega_0$ なるものは存在しない．

注:　ここで，$\varphi_0(z^1, z^2) = (z^1/2, 2z^2)$ とすると，$\varphi_0^*(\omega_0 \wedge \omega_0) = \omega_0 \wedge \omega_0$ なる，M_1 と M_2 の間の微分同相になる．M_i は可縮だから，$[\omega_0]$ は自明であるが，積分 $\int_{M_i} \omega_0 \wedge \omega_0$ は不変量である．したがって，たとえば，$D^2(2) \times D(1)$ と $D^2(1) \times D(1)$ の間に，ω_0 を保つ微分同相がないことは直ちにわかる．

Gromov は定理 3 を擬正則曲線を使って示している．定理 3 は開多様体の例だが，閉多様体に対しても，同様な例がある．その証明も擬正則曲線によっている．すなわち，下記の,「非線形方程式を “トポロジー” に使う典型的パターン，あるいは「位相的場の理論」の方法，が使われている．

（１）M（＋たとえばシンプレクティック構造）に付加的な構造 α を足す．
（２）これを使って非線形方程式を作り，その解の数を「数える」.（解のなすモジュライ空間でコホモロジー類を積分するなど，より複雑な手続きをすることもある.）
（３）得られた数が α によらないことを証明する．

このパターンを創始したのは Donaldson で，4 次元多様体の不変量を Yang-Mills 方程式を用いて定義したのが最初である．

以下に Gromov-Witten 不変量のについての荒く要約をする．ここでは，出発するのは，シンプレクティック多様体 (M, ω) で，α は概複素構造である．

定義 2.　(M, ω) のシンプレクティック構造と整合的な概複素構造 J_M とは，(1) $J : TM \to TM$, (2) $J^2 = -1$, (3) $\omega(X, JX) \geq 0$, 等号は $X = 0$ の場合のみ成り立つ，(4) $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$，の 4 つの条件が成り立つことを指す.

命題 1.　任意の (M, ω) に対して，それと整合的な概複素構造全体の集合は空ではなくまた可縮である．

証明は線形代数である．

次に Σ をリーマン面とし，$j_\Sigma : T\Sigma \to T\Sigma$ をその複素構造とする．

定義 3.　$\varphi : \Sigma \to M$ が擬正則とは，その各点での微分 $d_p\varphi : T_p\Sigma \to T_{\varphi(p)}M$ が j_Σ-J(複素) 線形であることを指す.(つまり，$d_p\varphi(j_\Sigma V) = J(d_p\varphi(V))$).

さて，g, m を 0 以上の整数，$\beta \in H_2(M; \mathbb{Z})$ とする.（$2g + m \geq 3$ または $\beta \neq 0$ と仮定する.）次の条件を満たす組，$((\Sigma, \vec{p}), \varphi)$ を考える．

(1)　Σ は種数 g のリーマン面.
(2)　$\vec{p} = (p_1, \cdots, p_m)$ は相異なる Σ の元 m 個の (順番の付いた) 組.
(3)　$\varphi : \Sigma \to M$ は擬正則写像で，$\varphi_*([\Sigma]) = \beta$.

(1),(2),(3) を満たす，2 つの組 $((\Sigma, \vec{p}), \varphi)$，$((\Sigma', \vec{p}'), \varphi')$ が同型（$((\Sigma, \vec{p}), \varphi) \sim ((\Sigma', \vec{p}'), \varphi')$）とは，$\psi : \Sigma \to \Sigma'$ なる双正則写像 (リーマン面の同型）があって，$\psi(p_i) = p'_i$，$\varphi' \circ \psi = \varphi$ が成り立つことを指す.

定義 4.　(1), (2), (3) を満たす $((\Sigma, \vec{p}), \varphi)$ の同型類全体を $\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)$ と書き，その (仮想) 基本ホモロジー類 (virtual fundamental class) を Gromov-Witten 不変量と呼ぶ.

定義 4 の正当化の要点を以下に記す (詳しくは [FO] などを見よ．).

(い)　$\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)$ には「よいコンパクト化 $\mathcal{CM}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)$」が存在する．(コンパクト化の元を安定写像 (stable map) と呼ぶ.
(ろ)　$\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)$ の (実) 次元（仮想次元）は

$$\dim \mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta) = 2(n-3)(1-g) + 2n + 2nm + c_1(M) \cap \beta$$

である.（これが Gromov-Witten 不変量のサイクルとしての次数である.）

(は)　$\mathcal{M}_{g,m}((M,\omega,J),\beta)$ は，局所的には，軌道体上の軌道束 (orbibundle) の切断の零点集合としてあらわされる．このことを利用して，その基本ホモロジー類は $\mathbb{Q}$ 上で定義される．
(に)　$ev: \mathcal{CM}_{g,m}((M,\omega,J),\beta) \to M^m \times \mathcal{CM}_{g,m}$ が定義される．ここで，$\mathcal{CM}_{g,m}$ は種数 g の m 点付きリーマン面 (安定曲線）のモジュライ空間である．ただし，$2g+m<3$ のとき（$\beta \neq 0$ である）この成分は考えない．（つまり，ev は M^m への写像である.）さらに，$m=0$ のときは ev は考えず，$2(n-3)(1-g)+2n+2nm+c_1(M)\cap\beta=0$ のときのみ考え，この場合は数 ($\mathcal{CM}_{g,m}((M,\omega,J),\beta)$ の「元の数」）が Gromov-Witten 不変量である (有理数）．ev の定義は

$$ev((\Sigma,\vec{p}),\varphi) = ((\varphi(p_1),\cdots,\varphi(p_m)),[(\Sigma,\vec{p})])$$

である．Gromov-Witten 不変量は

$$GW_{g,m}((M,\omega,J),\beta) \in H_{2(n-3)(1-g)+2n+2nm+c_1(M)\cap\beta}(M^m \times \mathcal{CM}_{g,m};\mathbb{Q})$$

である．
(ほ)　Gromov-Witten 不変量は J などによらず，シンプレクティック多様体 (M,ω) のみから定まる．さらに，シンプレクティック構造の連続変形で不変である．

たとえば，3 次元 Calabi-Yau 多様体の場合（$n=3$, $c_1(M)=0$ の場合）には，$m=0$ ならば $2(n-3)(1-g)+2n+c_1(M)\cap\beta=0$ がどの g でも成り立ち，すなわち，$m=0$ の場合の Gromov-Witten 不変量は有理数である．

Gromov-Witten 不変量の理論の最大の難点は，計算法である．すなわち，Gromov-Witten 不変量は一般に計算が難しい．(非線形方程式の解の数を調べるのは難しい.）ミラー対称性は，その有力な計算法を与えるものである，とも見ることができる．以下，3 次元 Calabi-Yau 多様体に限って（$g=0$ の）Gromov-Witten 不変量に関するミラー対称性の主張の一端を述べる．まず，$GW_{0,3}((M,\omega,J),\beta) \in H_6(M^3;\mathbb{Q})$ に注意する．($\mathcal{CM}_{0,3}$ は 1 点であった．) これから，

$$\bigoplus_{k_1+k_2+k_3=6} Q^M_{0,3} : H^{k_1}(M;\mathbb{Q}) \otimes H^{k_2}(M;\mathbb{Q}) \otimes H^{k_3}(M;\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}[[q]] \qquad (1)$$

が

$$Q^M_{0,3}(P_1,P_2,P_3) = \sum_{\beta} T^{\beta\cap\omega}(P_1 \times P_2 \times P_3) \cap [GW_{0,3}((M,\omega,J),\beta)]$$

で定義される．(1) はポアンカレ双対を用いると，

$$H^{k_1}(M;\mathbb{Q}) \otimes H^{k_2}(M;\mathbb{Q}) \to H^{k_1+k_2}(M;\mathbb{Q}[[q]]) \tag{2}$$

とみなせる．これは $q=0$ とおくと，カップ積と一致する．その意味で (2) はカップ積の変形とみなせる．これを量子カップ積という．((2) は結合法則を満たす．)

3 次元 Calabi-Yau 多様体の場合は，$k_1 = k_2 = k_3 = 2$ である場合だけが本質的である．そのとき，Q は有理数である Gromov-Witten 不変量

$$m_\beta = GW_{0,0}((M,\omega,J),\beta) \in \mathbb{Q}$$

を用いて，

$$Q(P_1,P_2,P_3) = \sum_\beta m_\beta q^{\beta\cap\omega}(P_1\cap\beta)(P_2\cap\beta)(P_3\cap\beta) \tag{3}$$

とあらわされる．$H^2(M;\mathbb{Q})$ 上の $Q[[T]]$ 値の関数

$$F(\omega+P) = \sum_\beta m_\beta q^{\beta\cap(\omega+P)} \tag{4}$$

を用いると

$$Q(P_1,P_2,P_3) = -\left.\frac{\partial^3}{\partial t^1\partial t^2\partial t^3}F(\omega+t^1P_1+t^2P_2+t^3P_3)\right|_{t^1=t^2=t^3=0}$$

が成り立つ．正確に言うと，右辺を q が定数であるかのごとくに計算した後，でてくる $\log q$ を -1 と置いたのが左辺である ($\log q$ の形になっていない q はそのままにしておく)．$q=e^{-1}$ とおくことができれば，こういう回りくどいことをいわなくてもいいのだが，$q=e^{-1}$ としたときの (4) の収束が一般には証明されていない．

(4) の F のことを，Gromov-Witten ポテンシャルと呼ぶ．

次に湯川結合の復習をする．Moser の定理により $H^2(M;\mathbb{R})$ は M のシンプレクティック構造のモジュライ空間の接空間とみなせる．湯川結合は複素構造の変形の接空間上に定義される．$M^\dagger$ を 3 次元 Calabi-Yau 多様体とする．小平-Spencer の一般論により，$M^\dagger$ の複素構造の変形は $H^1_{\bar\partial}(M^\dagger;T_{\mathbb{C}}M^\dagger)$ （すなわち，$M^\dagger$ の複素接ベクトル束を係数とする 1 次 Dolbeault コホモロジー）であらわされる．Tian-Todorov の定理により，Calabi-Yau 多様体の変形理論では倉西写像

$$H^1_{\bar\partial}(M^\dagger;T_{\mathbb{C}}M^\dagger) \to H^2_{\bar\partial}(M^\dagger;T_{\mathbb{C}}M^\dagger) \tag{5}$$

は自動的に0になり，したがって，$H^1_{\bar\partial}(M^\dagger;T_{\mathbb{C}}M^\dagger)$ は複素構造のモジュライ空間の接空間を与える．

Calabi-Yau 多様体では，$\Lambda^{3,0}M^\dagger \cong \mathbb{C}$ である．（これを Calabi-Yau 多様体の定義にする[3]．）この同型のとり方を決めておく．すなわち正則3形式 Ω をとっておく．(決め方などにはここでは触れない．）すると，その双対により

$$i_\Omega : \Lambda^3 T_{\mathbb{C}}M^\dagger \cong \mathbb{C}$$

も決まる．これにより，

$$\mathrm{Yu} : H^1_{\bar\partial}(M^\dagger;T_{\mathbb{C}}M^\dagger) \otimes H^1_{\bar\partial}(M^\dagger;T_{\mathbb{C}}M^\dagger) \otimes H^1_{\bar\partial}(M^\dagger;T_{\mathbb{C}}M^\dagger) \to \mathbb{C} \tag{6}$$

が

$$\mathrm{Yu}(X_1,X_2,X_3) = \int_{M^\dagger} (i_\Omega \otimes 1)(X_1 \cup X_2 \cup X_3) \wedge \Omega$$

できまる．これが湯川結合である．これは，周期写像の言葉で表すことができ，するとピカール・フックス方程式との関係などがわかるが，筆者は詳しくないので述べない．

予想 1.（有理曲線に関してのミラー対称性予想）　M と $M^\dagger$ が互いのミラーとすると，Ω と同型 $\mathrm{Mir} : H^2(M;\mathbb{Q}) \cong H^1_{\bar\partial}(M^\dagger;T_{\mathbb{C}}M^\dagger)$ が定まり[4]，次の式が成り立つ．(ただし右辺では $q = e^{-1}$ を代入する．代入したものが収束することも，予想の一部である．）

$$\mathrm{Yu}(\mathrm{Mir}(P_1),\mathrm{Mir}(P_2),\mathrm{Mir}(P_3)) = Q(P_1,P_2,P_3)$$

予想1は種々の多様体の場合に (特に最初に予想が立てられた5次曲面の場合に）Givental らによって証明されている．それらの証明では，不動点公式（群作用を用いた局所化）を用いて，Gromov-Witten 不変量を計算するのが要点である．

となると，不満が残る．すなわち，これらの証明は，ミラー対称性が予想された物理的直感をそのままはあまり正当化していない．すなわち，

[3]必要におおじて，さらに，ホロノミー群の接空間への表現が既約なことを仮定する．これは，ホロノミー群が $SU(n)$ に丁度一致すること同値である．また，M が完備なら，M の普遍被覆空間が $\mathbb{R}$ を直積因子（ド・ラーム分解における）を持たないことと同値である．また，M がコンパクトなら，M が単連結であることとも同値である．ただし，トーラスなどを含めることにして，この仮定を入れない方が例が増えるなどの利点がある場合もある．文脈でわかると期待して，この仮定が入っているかどうかはいちいち断らない．

[4]Mir はミラー写像と呼ばれているもの (の微分）である．

シンプレクティック多様体側（Gromov-Witten 不変量）と複素多様体側（周期積分あるいは湯川結合）を独立に計算し，それが等しいことを見ている[5].

振り返れば，もともとミラー対称性予想が理論物理で見出されたのは，次のような過程であった．

(イ)　Calabi-Yau 多様体があると，共形場の理論ができる．共形場の理論を作るやり方には 2 通りあり，A モデル，B モデルと呼ばれる．

(ロ)　共形場の理論にはある対称性があり，これで移すことにより，M から A モデルで作った共形場の理論と，$M^\dagger$ から B モデルで作った共形場の理論が同型になる．

(ハ)　共形場の理論から決まるある数 (3 点関数?) があり，それが A モデルでは Gromov-Witten 不変量 $GW_{0,3}$ すなわち Q （量子コホモロジー環の構造定数）に，B モデルでは湯川結合になる．

この議論で，共形場の理論と言う言葉を使ったが，これは数学ではすでに確定した意味を持っており，それを（たとえば擬正則曲線を使って）厳密に作るには，現在はほど遠い状況にある[6]．それで，もう少しぼかして，単に場の理論と呼んでおく．いずれにしても，空間から場の理論を作り，その間の同型を示し，その帰結として，Gromov-Witten 不変量と湯川結合の関係を示したいのである．

注：　「弦理論が重力理論を含む」ということの意味を考えると,「M 上の場の理論」と「空間 M」を分ける必要はないかもしれない．すなわち,「場の理論」が「空間」のことなのである，といってもよいかもしれない．

ホモロジー的ミラー対称性は，そのような方向にミラー対称性をより深化させたものとみなすことができる．

$M^\dagger$ を複素多様体とする．$\mathfrak{O}_{M^\dagger}$ を $M^\dagger$ の構造層とする．連接 $\mathfrak{O}_{M^\dagger}$ 加群層全体のなすカテゴリーを $\mathfrak{C}oh(M^\dagger)$ と書く．多分 Grotendieck による，次の哲学を思い出そう．

「X そのものより，カテゴリー $\mathfrak{C}oh(M^\dagger)$ の方が重要である．すなわち，この場合「空間」とはカテゴリー $\mathfrak{C}oh(M^\dagger)$ のことである.」

シンプレクティック多様体 M に対しては，その中のラグランジュ部分多様体を対象とするとする（A_∞）カテゴリー $\mathfrak{L}ag(M)$ が定まる[7]．ホモ

[5]理論物理から来る発想をまったく使っていないわけではないと思われるが，その辺はより微妙で筆者には説明できない．

[6]量子効果がない B モデルの場合には試みがあるようである．

[7]Kontsevitch が Fukaya category と呼んだもの．

ロジー的ミラー対称性予想はとりあえずは，次のように述べられる．

予想 2. $\mathfrak{Coh}(M^\dagger)$ の導来圏と，$\mathfrak{Lag}(M)$ の導来圏[8]は同型である．

注： 予想 2 が予想 1 を導くかどうかは，まだ未解決な問題である．[Ko] などを見ると，なにやら書いてあるし，いくつかのアイデアもあるが，確立した厳密な証明はない．

以下本稿では予想 2 の証拠となることのいくつかを述べる．述べないことも含めてそれを列挙すると以下の通り．

(A) いくつかの状況で，$\mathfrak{Lag}(M)$ の自己同型と $\mathfrak{Coh}(M^\dagger)$ の自己同型の対応が観察されている.（これについては，2 つの場合を §2 と §3 でそれぞれ説明する.）
(B) トーラスの場合かなりの程度にチェックされている.（これは述べない．Polishchuk-Zaslow[PZ](楕円曲線), Fukaya[Fu1]（高次元）をみよ.）
(C) Strominger-Yau-Zaslow[SYZ] によるミラー多様体の構成についての提案と，族の Floer ホモロジーを合わせることで，証明のアイデアが得られる.（この路線は筆者が今研究しているもののひとつなのだが，あちこちに書いたので今回は述べない．[Fu4], [KS], [Fu6] などを見よ.）
(D) 変形理論との関係，2 以上の種数への一般化，安定性など，非常に多くの深く精緻な構造に関して，両者で平行した構成が可能であり，得られる構造に深い類似が見られる.（§4 などを見よ．安定性については述べるつもりだったが，時間切れになった．[VZ] の 38.4 節の解説が比較的まとまっている.）
(E) Fano 多様体と特異点理論 (Landau-Ginzburg 模型) の場合の類似の予想が様々な場合に証明されている.（これは述べないが，§2 には関係がある.）また，4 次曲面の場合にも，最近 Seidel によって証明されたという．

この節の残りでは，ホモロジー的ミラー対称性とブレインの理論との関係などについてもう少し述べる．

予想 1 はモジュライ空間の接空間上の積構造の一致として理解された（この節で一応説明済みとする）．予想 2 のカテゴリーの同型，特に射の (高次の）合成をあらわす演算の一致は，その一般化と理解できる．このことを説明する．

$M^\dagger$ の複素構造のモジュライ空間を $\mathcal{M}_c(M^\dagger)$ と書く.（$H^1_{\bar\partial}(M^\dagger, T_{\mathbb{C}}M^\dagger)$ はその接空間であった．そして湯川積はその上の積構造であった.）ここで

[8] A_∞ カテゴリーの導来圏の定義は [Fu2] 参照.

モジュライ空間 $\mathcal{M}_c(M^\dagger)$ を拡大することを考える．すなわち，$M^\dagger$ 上の複素ベクトル束 $E \to M^\dagger$ を考えて，$M^\dagger$ の複素構造と E の正則ベクトル束の構造の組を考える．$\mathcal{M}_c(M^\dagger, E)$ をこのような構造の組のモジュライ空間とする．つぎのような写像の列があることが直ちにわかる．

$$\mathcal{M}_c(E) \to \mathcal{M}_c(M^\dagger, E) \to \mathcal{M}_c(M^\dagger). \tag{7}$$

ここでファイバー $\mathcal{M}_c(E)$ は $M^\dagger$ の複素構造を固定したときの E 上の正則ベクトル束の構造のモジュライ空間である．（これは $M^\dagger$ の複素構造に一般にはよるから (7) はファイバー束とは限らない．）

(7) のシンプレクティック多様体 (M, ω) 側での対応物は次の通りである．まず，シンプレクティック構造のモジュライ空間を $\mathcal{M}_s(M)$ とする．Moser の定理により，写像 $\mathcal{M}_s(M) \to H^2(M; \mathbb{R})$，$[M, \omega] \to [\omega]$ があり，局所的には同型を与える．（大域的には全射とも単射ともいえない．）この写像は明らかに開写像である．（これは微分形式が非退化という条件が小さい摂動で保たれることによる．）この事実は，Calabi-Yau 多様体の変形理論で倉西写像が自動的に 0 になるという前に引用した Tian-Todorov の定理に関わる．

注：　Calabi-Yau 多様体が平坦なド・ラーム因子（普遍被覆空間のリーマン多様体としての直積因子）を持たないと，$H^2(M; \mathbb{C}) \cong H^{1,1}(M)$ である．したがって，$\mathcal{M}_s(M)$ はケーラー構造の変形空間（ケーラー錐）と局所的には一致する．(大域的にはわからない．)

M のラグランジュ部分多様体 L を考える．L と L' がハミルトン同相で移りあうとき L と L' は同値，なる同値関係を考える．

注：　L がラグランジュ部分多様体とは，$\dim L = \frac{1}{2} \dim M$ で，シンプレクティック形式の L への制限が 0 であることを指す．$\varphi : M \to M$ がハミルトン同相であるとは，$\varphi_t : M \to M$ と $f : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ があって，$\varphi_0 = id, \varphi_1 = \varphi,$ が成り立ち，さらに，$f_t(x) = f(t, x)$ とおいたとき

$$\omega \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}, X \right) = df_t(X)$$

が成り立つことを指す．このような φ は自動的に ω を保つ．

L の部分多様体としてのイソトピー類を決めて，ちょっといい加減な記号法だが L と書く．そのイソトピー類に属するラグランジュ部分多様体のハミルトン同相による同値類全体を $\mathcal{M}_s(M, L)^{pre}$ とかく．pre が付いて

いるのは，これには修正が必要だからで，正しくは [FOOO] の (Floer ホモロジーの定義可能性の) 障害が消えるラグランジュ部分多様体全体を $\mathcal{M}_s(M,L)$ とする (§4 を見よ．そこで説明する，Maurer-Cartan スタック $\mathcal{M}(L)$ が (8) のファイバー $\mathcal{M}_s(L)$ である)．

$$\mathcal{M}_s(L) \to \mathcal{M}_s(M,L) \to \mathcal{M}_s(M). \tag{8}$$

なる (7) に類似の写像の列が得られる．これを用いると予想 2 の一部を次のように言い換えられる．

予想 3． (M,L) に対して，$(M^\dagger,E)$ がそのミラーであるとき，(7) は (8) に同型になる．

$\mathcal{M}_s(L)$ の一点での（ザリスキー）接空間は Floer コホモロジー $HF^1(L,L)$ で，$\mathcal{M}_c(E)$ の一点での（ザリスキー）接空間は $\mathrm{Ext}^1(E,E)$ である．よって，予想 3 は Floer ホモロジーと Ext の一致と関わる．また，その上の積構造の一致とも次のようにして関わる．$\mathcal{M}_s(M)$, $\mathcal{M}_c(M^\dagger)$ の場合は，変形の障害 (倉西写像）は自動的に 0 であったが，ベクトル束の変形や，ラグランジュ部分多様体の Floer ホモロジーの定義可能性の障害は 0 ではない．予想 3 はこの二つが一致することを予想する．変形の障害あるいは倉西写像を冪級数展開すると，コホモロジー（$\mathrm{Ext}(E,E)$[9] または $HF(L,L)$[10]）上の積構造 A_∞ 構造の構造定数がその係数になる（§4 で説明する．）．したがって，予想 3 から Ext と Floer ホモロジーが積構造もこめて一致することが（ほぼ）従う．

振り返って，$\mathcal{M}_s(M)$, $\mathcal{M}_c(M^\dagger)$ の場合を考えてみると，これらの場合は，変形の障害が消えるため，いわば 2 次的な不変量が現われ，それが湯川積や (量子）カップ積であると考えられるのではないか．ただし，この言い方を正当化するやり方を筆者が持っているわけではない．

§2 自己同型の一致 I – シンプレクティック多様体のデーンのねじりとフーリエ・向井変換 –

以下述べることは，おもに Seidel（Kontsevitch のアイデアが一部その前にあった）による．Seidel-Thomas[ST], Seidel-Khovanov[SK], Seidel[Se1], Aspinwall [As] など参照．

[9] $End(E)$ 係数の Dolbeault コホモロジー
[10] Floer ホモロジー

以下 (M,ω) をシンプレクティック多様体[11]，$(M^\dagger, J_{M^\dagger})$ を複素多様体とする[12].

M からは (A_∞) カテゴリー $\mathfrak{L}ag(M)$ が定まる．M の対称性をあらわすのは，群 $\mathrm{Aut}(M,\omega) = \{g : M \to M | g^*\omega = \omega\}$ であるが，この群より大きい群が $\mathfrak{L}ag(M)$ に作用することがしばしばある．すなわちカテゴリー $\mathfrak{L}ag(M)$ の自己同型を $\mathrm{Aut}\mathfrak{L}ag(M)$ と書いたとき，$\mathrm{Aut}\mathfrak{L}ag(M) \supset \mathrm{Aut}(M,\omega)$ である．

一方で，$\mathrm{Aut}(M^\dagger, J_{M^\dagger})$（すなわち $(M^\dagger, J_{M^\dagger})$ の双正則同型のなす群）を考える．$(M^\dagger, J_{M^\dagger})$ の解析的連接層のなすカテゴリーの導来圏[13]を $\mathbb{D}M^\dagger$ と書く．$\mathrm{Aut}\mathbb{D}M^\dagger \supset \mathrm{Aut}(M^\dagger, J_{M^\dagger})$ は明らかであるが，等号は一般には成立しない．

ホモロジー的ミラー対称性から

$$\mathrm{Aut}\mathfrak{L}ag(M) \cong \mathrm{Aut}\mathbb{D}M^\dagger \tag{9}$$

が従う．一つの面白い点は，(9) で $\mathrm{Aut}(M,\omega)$ の元が対応する $\mathrm{Aut}\mathbb{D}M^\dagger$ の元が必ずしも $\mathrm{Aut}(M^\dagger, J_{M^\dagger})$ の元とは限らないことである．すなわち (M,ω) のシンプレクティック同相 $f : M \to M$ に対して，そのミラーである自己同型 $f^\dagger : \mathbb{D}M^\dagger \to \mathbb{D}M^\dagger$ が必ずしも $M^\dagger$ の自己同型からは得られないことである．以下でその例を挙げる．具体的には，f はデーンのねじり，$f^\dagger$ はある種のフーリエ・向井変換である．

2-1 デーンのねじり．

以下でシンプレクティック多様体でのデーンのねじりを説明する．まずリーマン面 M の場合を考える．$\ell \subset M$ を S^1 とし，そのホモロジー類は 0 でないとする．このとき，ℓ に沿ったデーンのねじりとは，M を ℓ できり，1 回ねじって，貼り替える操作に対応する微分同相 f_ℓ である.（次ページの図 1 を見よ.）

f_ℓ はホモロジーに次のように作用する．

$$f_{\ell *}([\gamma]) = [\gamma] - ([\ell] \cap [\gamma])[\ell]. \tag{10}$$

これは次のように一般化することができる．(M^{2n},ω) を $2n$ 次元のシンプレクティック多様体とする．$L_0 \subset M$ なるラグランジュ部分多様体（すなわち $\dim L = n$, $\omega|_L = 0$）で，n 次元球面に微分同相であるとする．

[11] ω を略すことがしばしばある．
[12] $J_{M^\dagger}$ もしばしば省略する．
[13] 定義は 2-2 にある．

命題 2. シンプレクティック同相 $f_{L_0}: M \to M$ であって，次の条件を満たすものが存在する．

(1) f_{L_0} は L_0 のある近傍の外では恒等写像に一致する．
(2) $f_{L_0 *}(\alpha) = \alpha - (\alpha \cap [L_0])[L_0]$ が任意の $\alpha \in H_n(M)$ に対して成り立つ．

f_{L_0} の起源は複素幾何学の下記の構成にある．$\pi : \widehat{\mathcal{M}} \to D^2$ なる 2 次元円盤上の複素多様体の族で，$t \in D^2 - \{0\}$ に対しては $\pi^{-1}(t) \cong M$ で，$\pi^{-1}(0)$ は M で L_0 を 1 点につぶした多様体になっているものがあるとする．すなわち，L_0 が消失サイクルであるとする．このとき，$0 \in D^2$ の周りのモノドロミーは $M \to M$ なる写像を定めるが，これが f_{L_0} である．複素幾何学ではこの f_{L_0} はピカール・レフシッツ理論で有名である．シンプレクティック版は Seidel の一連の論文で詳しく調べられている．

注： n を偶数とする．L_0 はラグランジュ部分多様体であるから，法束は接束に同型で，よって $[L_0] \cap [L_0] = 2$ である．したがって，

$$f_{L_0 *}([L_0]) = -[L_0]$$

である．さらに，$L_0, L_1, \cdots, L_N \subset M$ で，それぞれの L_i が命題 2 の仮定を満たし，

$$L_i \cap L_j = \begin{cases} 1 & j = i + 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

とする．このとき，$f_{L_i *}$ は $H_n(M; \mathbb{C})$ 上 $[L_i]$ に直交する超平面達による，境映変換群（A_n 型の）のように作用する．実は，ハミルトン同相を法とした，シンプレクティック同相の群の中で，f_{L_i} たちが境映変換群をなすことが，Seidel-Khovanov[SK] によって示されている．

デーンのねじりとミラー対称性の関係を論じよう．$HF(L_1, L_2)$ で 2 つのラグランジュ部分多様体 L_1, L_2 の間の Floer ホモロジーを表す．Floer ホモロジーとデーンのねじりに付いて次に述べることの類似物が Seidel[Se1] で証明されている．

「定理 4.」 M を $c_1(M) = 0$ であるシンプレクティック多様体，$L_0 \subset M$ を球面と同相なラグランジュ部分多様体とする．L_1, L_2 を別のラグランジュ部分多様体とする．このとき，次の長い完全系列が存在する．

$$\to HF(L_0, L_1) \otimes HF(L_2, L_0) \to HF(L_2, L_1) \to HF(L_2, f_{L_0}(L_1)) \to \tag{11}$$

Seidelが示した定理はここで述べた場合ではなくて（それで「定理4」と括弧が付いている），(M,ω),L_iが完全（exact）である場合である.（その場合には定理4にあたることが [Se1] で厳密に証明されている.）ここで (M,ω) が完全とは，$d\theta=\omega$ であるような，θ が存在することを指し，L_i が完全とは，$\theta|_{L_i}=dh_i$ なる関数 h_i が存在することを指す．M がコンパクトならば，$[\omega]\neq 0$ であるから，M は完全にはなり得ない．M がコンパクトでない場合，たとえば特異点を解消したものの近傍の場合など，が典型である．正確な仮定は [Se1] をみよ．

「定理4」はゲージ理論における Floer 完全系列に起源を持つ．それについて説明しよう．X を3次元多様体とし，$K\subset X$ をその中の結び目とする．N をホモロジー球面と仮定する．K の管状近傍 $N(K)$ を X から除いたもの $X-N(K)$ を考える．K をはる曲面 Σ（つまり境界付で向きの付いた2次元多様体で，$\partial\Sigma=K$ なるもの）をとり，$\partial(X-N(K))\cap\Sigma$ を longitude $[\ell]\in\pi_1(\partial(X-N(K)))$ とよぶ．また，$\pi_1(\partial(X-N(K)))\to\pi_1(N(K))$ の核の生成元に当たる閉曲線を meridian $[m]\in\pi_1(\partial(X-N(K)))$ とよぶ．$a[m]+b[\ell]$ が 0 になるように，$X-N(K)$ に中身の詰まったトーラスを張ったものを X の (a,b) 手術といい $X(a,b)$ とかく．$X(-1,0)$ はホモロジー球面，$X(0,1)$ は $S^1\times S^2$ と同じホモロジー群を持つ．このとき，（Yang-Mills 方程式を用いて定まる）3次元多様体の Floer ホモロジーに関して，

$$\to HF(X(-1,0))\to HF(X)\to HF(X(0,1))\to$$

なる長い完全系列が知られている.（Floer[Fl2],Braam-Donaldson [BD]）.（ただし，$HF(X(0,1))$ は $w^1\neq 0$ である捩れた $SO(3)$ 束の接続を用いて定義する.）Atiyah-Floer 予想（ゲージ理論とシンプレクティック幾何学の Floer ホモロジーの一致）のもとに，Floer の完全系列は Seidel の完全系列に一致すると考えられている．

以下で,「定理4」の意味と証明のアイデアについて若干の説明をする．

まず Floer ホモロジーの定義について復習する．M をシンプレクティック多様体，L_a,L_b をそのラグランジュ部分多様体とする.（以下のことがそのまま成り立つのは，M,L_a,L_b が完全である場合であるが，然るべき修正を加えて，より一般の場合も成り立つ.）簡単のため，L_a と L_b は横断的に交わっているとする．このとき，Floer 複体 $CF(L_a,L_b)$ とは，$L_a\cap L_b$ の元 p に対して，１つづつ生成元 $[p]$ をもつ，$\mathbb{Z}$ 上の自由加群である．す

なわち，

$$CF(L_a, L_b) = \bigoplus_{p \in L_a \cap L_b} \mathbb{Z}[p].$$

$p \in L_a \cap L_b$ に対して，Maslov-Viterbo 指数，という整数 $\mu(p)$ がさだまり，これで $CF(L_a, L_b)$ は次数付き加群になる．また，$L_a \cup L_b$ に境界をもつ擬正則曲線を用いて，境界作用素

$$\partial : CF_k(L_a, L_b) \to CF_{k-1}(L_a, L_b)$$

がさだまり，$\partial^2 = 0$ が成り立つ．Floer ホモロジー $HF(L_a, L_b)$ は

$$HF(L_a, L_b) = \frac{\mathrm{Ker}\partial}{\mathrm{Im}\partial}$$

である．

さて,「定理 4」の状況を考えると，次のことが成り立つ．

補題 1.

$$f_{L_0}(L_1) \cong (L_1 \cap L_2) \cup ((L_0 \cap L_1) \times (L_0 \cap L_2))$$

補題の証明は次ページの図 2 を見て欲しい．

さて，補題から，加群の準同型

$$CF(f_{L_0}(L_1) \cap L_2) \cong CF(L_1, L_2) \oplus (CF(L_1, L_0) \otimes CF(L_0, L_2))$$

がわかる．境界作用素を調べることで，鎖複体の完全系列

$$0 \to CF(L_1, L_0) \otimes CF(L_0, L_2) \to CF(f_{L_0}(L_1) \cap L_2) \to CF(L_1, L_2) \to 0$$

が導かれる．（本当はここが肝心なのだが省略する．）これから「定理 4」が導かれる．

2-2 フーリエ・向井変換

以上はシンプレクティック多様体側での構成であったが，この構成のミラーに当たる構成を複素多様体側で行う．そのため，まず導来圏の復習をする．

$M^\dagger$ を複素多様体とする．$\mathfrak{O}_{M^\dagger}$ をその構造層とする．（すなわち，$\mathfrak{O}_{M^\dagger}$ は $M^\dagger$ 上の正則関数の芽のなす層である．）$\mathfrak{O}_{M^\dagger}$ 加群層のなす余鎖複体 $\mathfrak{F}^\cdot$ を考える．すなわち，$\mathfrak{F}^i$ なる $\mathfrak{O}_{M^\dagger}$ 加群層達と，$d:\mathfrak{F}^i\to\mathfrak{F}^{i+1}$ なる準同型たちで，$d\circ d=0$ なるものがあるとする[14]．2 つの余鎖複体 $\mathfrak{F}^\cdot$,$\mathfrak{G}^\cdot$ の間の準同型とは，$\varphi^i:\mathfrak{F}^i\to\mathfrak{G}^i$ たちで，$d\circ\varphi^i=\varphi^{i+1}\circ d$ を満たすもののことを指す．2 つの準同型 φ と ψ が（鎖）ホモトピックとは，$H^i:\mathfrak{F}^i\to\mathfrak{G}^{i-1}$ で，

$$d\circ H^i+H^{i+1}\circ d=\varphi^i-\psi^i$$

を満たすものが存在することを指す．

余鎖複体の準同型はコホモロジー群の間の準同型を導くが，ホモトピックな写像がコホモロジーに導く準同型は一致する．

余鎖複体の準同型 $\varphi:\mathfrak{F}^\cdot\to\mathfrak{G}^\cdot$ が弱ホモトピー同値であるとは，それがコホモロジー群に導く写像 $\varphi^\sharp:H(\mathfrak{F}^\cdot)\to H(\mathfrak{G}^\cdot)$ が同型写像であることを指す．

さて，$M^\dagger$ 上の連接層のなす圏の導来圏 $\mathbb{D}M^\dagger$ は次のようにして定義される．$\mathbb{D}M^\dagger$ の対象は $M^\dagger$ 上の連接層のなす余鎖複体の弱ホモトピー同値類である．$\mathbb{D}M^\dagger$ の射は余鎖複体の準同型のホモトピー類である．

導来圏はアーベル圏にはならないが，3 角圏になる．アーベル圏にならないという意味は，射の核や余核は定義されないということを意味し，とくに完全系列の概念は意味を成さない．3 角圏になるという意味は，完全 3 つ組み（exact triple）の概念が意味をもつことを意味する．（それからコホモロジーに移ると長い完全系列が得られる．）3 角圏の定義は [GeM] あたりを見てもらうことにして，ここでは $\mathbb{D}M^\dagger$ での完全 3 つ組みの定義すなわち写像錐の構成を説明する．

余鎖複体の準同型 $\varphi:\mathfrak{F}^\cdot\to\mathfrak{G}^\cdot$ が与えられたとき，その写像錐 $\mathrm{Cone}(\varphi)$ は次のように定義される余鎖複体である．

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cone}(\varphi)^k=\mathfrak{F}^{k+1}\oplus\mathfrak{G}^k\\&d:\mathfrak{F}^{k+1}\oplus\mathfrak{G}^k\to\mathfrak{F}^{k+2}\oplus\mathfrak{G}^{k+1},\qquad d(a,b)=(da,(-1)^k\varphi(a)+db).\end{aligned}$$

$d^2=0$ が容易にわかる．さらに，余鎖複体の短い完全系列

$$0\to\mathfrak{G}\to\mathrm{Cone}(\varphi)\to\mathfrak{F}[1]\to 0 \tag{12}$$

[14]通常，有界性条件すなわち $i<I_0$ で $\mathfrak{F}^i=0$ などが仮定される．ここではそれについては省略する．

が成り立つ．ここで $\mathfrak{F}[1]$ は $\mathfrak{F}$ の次数を一つずらした余鎖複体すなわち $\mathfrak{F}[1]^k = \mathfrak{F}^{k+1}$ である．

(12) から長い完全系列

$$\cdots \to H^k(\mathfrak{F}) \to H^k(\mathfrak{G}) \to H^k(\mathrm{Cone}(\varphi)) \to H^{k+1}(\mathfrak{F}) \to H^{k+1}(\mathfrak{G}) \to \cdots$$

が得られるが，連結準同型 $H^k(\mathfrak{F}) \to H^k(\mathfrak{G})$ は $\varphi^\sharp$ に一致する．ある φ に対する，$\mathfrak{F} \to \mathfrak{G} \to \mathrm{Cone}(\varphi) \to \mathfrak{F}[1]$ に弱ホモトピー同値である $\mathbb{D}M^\dagger$ の対象と射の組を，完全 3 つ組み (exact triangle) とよぶ．

さて，複素多様体 $M^\dagger$ の側で「球面と同相なラグランジュ部分多様体」に対応するのが，球面的対象（sperical object）である．

定義 5. $\mathfrak{E}$ なる $M^\dagger$ の連接層が球面的対象であるとは，

$$\mathrm{Ext}^k(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}) \cong H^k(S^n; \mathbb{C})$$

が成り立つことを指す.（n は $M^\dagger$ の複素次元で，S^n は n 次元の球面．Ext は自分自身への準同型のなすベクトル束の Dolbeault コホモロジーのこと[15].）

たとえば，M が Calabi-Yau 多様体とし，$\mathfrak{E}$ を直線束とすると，

$$\mathrm{Ext}^k(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}) \cong H^k_{\bar\partial}(M; \mathbb{C}) \cong H^k(S^n; \mathbb{C})$$

であるから，任意の直線束は球面的対象である．

さて，M のミラーが $M^\dagger$ であるとする．$L_0 \subset M$ をラグランジュ部分多様体で球面と同相であるとする．L_0 のミラーである連接層 $\mathfrak{E}$ があるとしよう．ホモロジー的ミラー対称性は $HF(L_0, L_0) \cong \mathrm{Ext}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ を主張する．$HF(L_0, L_0)$ は L_0 のホモロジー群とスペクトル系列で結びついている[16]．L_0 が球面であることよりスペクトル系列は退化し，$HF(L_0, L_0) \cong H(S^n)$ になる．すなわち，$\mathfrak{E}$ は球面的対象である．デーンのねじり f_{L_0} が引き起こす $\mathfrak{L}ag(M)$ の自己同型のミラーに当たる $\mathbb{D}M^\dagger$ の自己同型を，$\mathfrak{E}$ を用いて構成するのが，次の目標である．

$\mathfrak{F}^\cdot$ を連接層の余鎖複体とする．$Hom(\mathfrak{E}, \mathfrak{F}^\cdot)$ を考える．これは連接層の導来圏の対象として定義できる.（すなわち，$\mathrm{Ext}^k(\mathfrak{E}, \mathfrak{F}^i)$ が $k > 0$ なる k

---

[15] $\mathfrak{E}$ がベクトル束の場合は.

[16] [FOOO] 参照

に対して全て消えるように $\mathfrak{F}^{\cdot}$ を取り替えておいてから，$Hom(\mathfrak{E},\mathfrak{F}^i)$ 達を考える）．次の射が存在する．

$$Hom(\mathfrak{E},\mathfrak{F}^{\cdot})\otimes\mathfrak{E}\to\mathfrak{F}^{\cdot} \tag{13}$$

すなわち，$(\alpha,u)\mapsto\alpha(u)$ である．

定義 6.

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{F}^{\cdot})=\mathrm{Cone}(Hom(\mathfrak{E},\mathfrak{F}^{\cdot})\otimes\mathfrak{E}\to\mathfrak{F}^{\cdot})$$

すなわち，(13) の写像錐.

$\mathcal{T}_{\mathfrak{E}}$ はフーリエ・向井変換の一種である．このことを説明する．まず，フーリエ・向井変換の復習をする．M_1, M_2 を複素多様体，$\mathfrak{K}$ を $\mathbb{D}(M_1\times M_2)$ の対象とする．函手 $\mathcal{T}_{\mathfrak{K}^{\cdot}}:\mathbb{D}M_1\to\mathbb{D}M_2$ が

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{F}^{\cdot})=\pi_{2*}(\mathfrak{K}^{\cdot}\otimes\pi_1^*\mathfrak{F}^{\cdot})$$

で定まる．ここで $\pi_i:M_1\times M_2\to M_i$ は射影，$\otimes$ は導来圏におけるテンソル積（Tor_k が $k>0$ で 0 になるように代表元を取り替えてからテンソル積を取る）である．$\mathcal{T}_{\mathfrak{K}^{\cdot}}$ をフーリエ・向井変換という.

定義 6 の変換は，$M_1=M_2=M^{\dagger}$,

$$\mathfrak{K}=\mathrm{Cone}(\pi_1^*(\mathfrak{E}^*)\otimes\pi_2^*\mathfrak{E}\to i_{\Delta}\mathfrak{O}_{M^{\dagger}})$$

とすれば得られる．ここで $i_{\Delta}:M^{\dagger}\to M^{\dagger}\times M^{\dagger}$ は対角集合への埋め込みである.

さて定義 6 の変換について，次のことが定義から直ちにわかる.

命題 3.　任意の $\mathfrak{G}^{\cdot}$ に対して，次の長い完全系列が存在する.

$$\to\mathrm{Ext}(\mathfrak{E},\mathfrak{F}^{\cdot})\otimes\mathrm{Ext}(\mathfrak{G}^{\cdot},\mathfrak{E})\to\mathrm{Ext}(\mathfrak{G}^{\cdot},\mathfrak{F}^{\cdot})\to\mathrm{Ext}(\mathfrak{G}^{\cdot},\mathcal{T}_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{F}^{\cdot}))\to$$

証明は (12) からわかる．命題 3 は Ext を HF と読み替えると「定理 4」になる．これが $\mathcal{T}_{\mathfrak{E}}$ が f_{L_0} のミラーであることの根拠の一つである.

別の根拠として，特性類のレベルでこの二つが一致することをみよう．M を $2n$ 次元のシンプレクティック多様体 $M^{\dagger}$ をそのミラーとする．ミラー対称性予想の一つは次のコホモロジーの同型である.

$$H^n(M)\cong\bigoplus_k H^{k,k}(M^{\dagger}) \tag{14}$$

同型 (14) も Mir と書く．

(14) とホモロジー的ミラー対称性の関係を考えよう．$L \subset M$ をラグランジュ部分多様体，$\mathrm{Mir}(L)$ をそのミラーである連接層とする．$[L] \in H^n(M)$ であるが，その (14) による像は何になるべきか考える．

定義 7. Calabi-Yau 多様体 $M^\dagger$ 上の連接層 $\mathfrak{F}$ の向井ベクトル $\mathrm{Mu}(\mathfrak{F})$ を

$$\mathrm{Mu}(\mathfrak{F}) = ch(\mathrm{Mu}(\mathfrak{F}))\sqrt{td(M^\dagger)} \in \bigoplus_k H^{k,k}(M^\dagger)$$

で定義する．ここで ch は Chern 指標，td は Todd 指標をあらわす．

予想 4. (14) で基本ホモロジー類は向井ベクトルに移る．すなわち

$$\mathrm{Mu}(\mathrm{Mir}(L)) = \mathrm{Mir}[L].$$

もちろん，ミラーの定義も (14) の定義も一般にはないから，予想としても数学的に定式化されているものではない．しかし，ミラー対称性が成立する状況では，間違いなく成り立つと信じられている．予想 4 の根拠は例えば次のことである．

$M^\dagger$ を 3 次元 Calabi-Yau 多様体とする．$\oplus_k H^{k,k}(M^\dagger)$ 上の反対称内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を

$$\langle x, y \rangle = (-1)^k \int_{M^\dagger} x \wedge y$$

$(x \in H^{k,k}(M^\dagger))$ で定義する．$ch(\mathfrak{E}^*)_k = (-1)^k ch(\mathfrak{E})_k$ ($()_k$ は $H^{k,k}(M^\dagger)$ 成分をあらわす) であるから，Riemann-Roch の定理により，

$$\sum_k (-1)^k \mathrm{rank}(\mathrm{Ext}^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})) = \langle \mathrm{Mu}(\mathfrak{F}), \mathrm{Mu}(\mathfrak{G}) \rangle \tag{15}$$

が成り立つ．一方，ラグランジュ部分多様体 L_1, L_2 について

$$\sum_k (-1)^k \mathrm{rank} HF^k(L_1, L_2) = [L_1] \cdot [L_2] \tag{16}$$

がわかる．(これは Maslov-Viterbo 指数が 2 を法として $p \in L_1 \cap L_2$ の交点数への寄与が $+$ か $-$ かで決まることを使うと，定義から得られる．)

ホモロジー的ミラー対称性

$$\mathrm{Ext}^k(\mathrm{Mir}(L_1), \mathrm{Mir}(L_2)) \cong HF^k(L_1, L_2)$$

を考えると，(14) が内積を保つならば，(15) と (16) で話があっていることがわかるであろう.（何を仮定して何を示しているのか頭がこんがらがるかもしれない．ここでは単にいくつかの予想の整合性を見ているだけで，何から何を証明しているわけでもないと思うのが一番よい．非常に多くのことが話があっている．嘘だったらこんなに話が合うはずがないというのがミラー対称性[17]の最大の根拠のようである.）

f_{L_0} で $[L]$ は

$$f_{L_0 *}([L]) = [L] - ([L] \cap [L_0])[L_0] \tag{17}$$

に移った (境映変換）．$\mathcal{T}_{\mathfrak{E}}$ で移すと向井ベクトルはどう変換されるか見よう．

補題 2. $\mathfrak{E}$ が球面的対象であるとき，次の式が成り立つ．

$$\mathrm{Mu}(\mathcal{T}_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{F}^{\cdot})) = \mathrm{Mu}(\mathfrak{F}^{\cdot}) - \langle \mathrm{Mu}(\mathfrak{E}), \mathrm{Mu}(\mathfrak{F}^{\cdot}) \rangle \mathrm{Mu}(\mathfrak{E})$$

補題 2 が (17) とぴったり対応している．補題 2 の証明は容易である．まず定義より，

$$ch(\mathcal{T}_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{F}^{\cdot})) = ch(\mathfrak{F}^{\cdot}) - \sum_k (-1)^k \mathrm{rank}(\mathrm{Ext}^k(\mathfrak{E}, \mathfrak{F}^{\cdot})) ch(\mathfrak{E})$$

$\sqrt{td}$ をかけて，また (15) を用いれば，補題が得られる．

2-3 5 次超曲面の場合

以上はモジュライ空間の 1 点の周りの話であるとみなせる.（デーンのねじりは，S^3 が退化するモジュライ空間の点の周りのモノドロミーであった.）5 次超曲面の場合にこれをつなぎ合わせて，モジュライ空間の大域的な様子との整合性をチェックすることができる．以下に説明するこの計算が Kontsevich がホモロジー的ミラー対称性を提出した初期に行った計算であると思われる．[As] にはもう少し別の場合についての計算も行われている．

$M^{\dagger}$ を $\mathbb{C}P^4$ のなかの 5 次超曲面とし，そのミラーを M とする．

ここで 5 次超曲面は複素多様体の構造の方を考え，M の方はシンプレクティック構造の方を考え，ホモロジー的ミラー対称性 $\mathfrak{L}ag(M) \cong \mathbb{D}M^{\dagger}$ を考察する.（Candelas 達に始まり Givental 達が証明をつけた一連の研究

[17] あるいは一般化に「Duality」

では，5 次超曲面 M の Gromov-Witten 不変量を調べるのに，そのミラー $M^\dagger$ の複素構造の変形を調べたから，ここで考えているのとシンプレクティック多様体側と複素多様体側が逆になっている.）

M の複素構造のモジュライ空間 $\mathcal{M}_c(M)$ が $M^\dagger$ のシンプレクティック構造のモジュライ空間 $\mathcal{M}_s(M^\dagger)$ に対応する[18]．今の場合は，$H^2(M)$ は 1 次元である．また，$\mathcal{M}_c(M)$ の方はよくわかっていて，$\mathbb{C}/\mathbb{Z}_5$ である[19]．すなわち，$\tau \in \mathbb{C}$ に対して，

$$x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + 5\tau x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 \tag{18}$$

であらわされる曲面を $\mathbb{Z}_5^4$ の作用で割ったものの特異点解消が (M, J_τ) である．ここで，$\mathbb{Z}_5^4 \cong \{(\alpha_0, \cdots, \alpha_4) | \alpha_i^5 = 1, \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 1\}$ で作用は，$(\alpha_0, \cdots, \alpha_4)(z_0, \cdots, z_4) = (\alpha_0 z_0, \cdots, \alpha_4 z_4)$ である．このとき，$(M, J_\tau) \cong (M, J_{e^{2\pi i/5}\tau})$ がわかるので，モジュライ空間 $\mathcal{M}_c(M)$ は $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_5$ である．

$\mathcal{M}_c(M)$ のコンパクト化には無限遠点 P_∞ のほかに 2 つの特異点 P_1, P_0 がある.（$P_0 = [0]$, $P_1 = [1]$ である.）P_1 では $M^\dagger$ は特異点をもちその特異点は M のあるラグランジュ部分多様体である $L_0 = S^3$ を 1 点につぶしたものになっている．実際 (18) は $(e^{2\pi i m_0/5}, e^{2\pi i m_1/5}, e^{2\pi i m_2/5}, e^{2\pi i m_3/5}, e^{2\pi i m_4/5})$ $n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 0$ で特異点をもつ．$\mathbb{Z}_5^4$ の作用でこれらの特異点は移りあうから，特異点は 1 点である．τ が他の 1 の 5 乗根の場合も同様である．

注：　(18) を $\mathbb{Z}_5^4$ の作用で割ったものは τ が 1 の 5 乗根でなくても，特異点はあるが，それらは作用からくる商特異点でこれを解消することにより，得られるのが M_τ である．τ が 1 の 5 乗根だと余分に特異点が生じる.）

$\tau = 1$ の周りでのモノドロミー $\alpha : M \to M$ は f_{L_0} である．(P_1 は conifold point と呼ばれる．)

次に P_∞ の周りのモノドロミーを β とする．P_∞ は極大退化点と呼ばれる．

最後に P_0 では，M は位数 5 の自己同型を持つ．モジュライ空間は P_0 で軌道体でその等化部分群（isotropy subgroup）が $\mathbb{Z}_5$ である．P_0 の周り

[18]すぐ上に書いたのと話が逆ではないかと思われるかもしれないが，書き間違いではない．先をみればこれでよいことがわかると思う．一言で言うと，シンプレクティック同相を作るために，複素構造のモジュライを考えているのである．言い換えると，シンプレクティックカテゴリーでピカール・レフシッツ理論をするのだが，たまたま積分可能な複素構造があるので，それを使っているわけである．

[19]このあたりについては，[COGP] 参照.

のモノドロミーは $\alpha \circ \beta$ にホモトピックである．したがって，コホモロジーのレベルでは

$$(\alpha \circ \beta)^5 = 1 \tag{19}$$

が成り立たないといけない．

α のミラーに当たる $\mathbb{D}M^\dagger$ の自己同型を S と書く．α はデーンのねじり f_{L_0} であったから，S は $\mathcal{T}_{\mathfrak{E}}$ である．ここで $\mathfrak{E}$ は L_0 のミラーに当たる球面的対象である．$\mathfrak{E}$ は構造層 $\mathfrak{O}_{M^\dagger}$ であるとされている[20]．すなわち

$$S = \mathcal{T}_{\mathfrak{O}_{M^\dagger}}.$$

次に，β のミラーに当たる自己同型を T とする．T も知られていて

$$T(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{H} \tag{20}$$

である．ここで $\mathfrak{H}$ は $\mathfrak{O}(1) \to \mathbb{C}P^4$ の $M^\dagger$ への制限である[21]．

S,T ともに複素多様体の自己同型としては実現されていない.（そのミラーはシンプレクティック多様体の自己同型として実現されている.）

ここでしたいチェックは $(ST)^5$ がコホモロジーのレベルで恒等写像であること，すなわち，次の等式である．

$$ch((ST)^5\mathfrak{F}) = ch(\mathfrak{F}) \tag{21}$$

これは易しいのでやってみよう．([As] から引き写してきたものである.）$H = c_1(\mathfrak{H})$ とする．

$$td(M^\dagger) = \frac{\frac{H}{1-e^{-H}}}{\frac{5H}{1-e^{-5H}}} = 1 + \frac{5}{6}H \tag{22}$$

である.（$M^\dagger$ が 5 次曲面であることに注意．分子が $\mathbb{C}P^4$ の Todd 類，分母が $M^\dagger \subset \mathbb{C}P^4$ の法ベクトル束の Todd 類である.）

$$\int_{M^\dagger} H^3 = 5 \tag{23}$$

にも注意する．

---

[20]なぜかは説明程度ならあると思われるが，証明はない．

[21]これも証明されている命題ではないが．

さて，$ch(\mathfrak{O}_{M^\dagger})=1$ に注意すると：

$$ch(T(\mathfrak{F}))=ch(\mathfrak{F})-((ch(\mathfrak{F})\cap(1+\frac{5}{6}H))1. \tag{24}$$

が成り立つ．また $S(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{H}$ より，

$$ch(S(\mathfrak{F}))=e^H ch(\mathfrak{F}) \tag{25}$$

である．あとは，これらの式を順につかって計算すればよい．例えば，$\mathfrak{F}=\mathfrak{O}_{M^\dagger}$ の場合をやってみると：$ch(\mathfrak{F})=ch(T(\mathfrak{F}))=1$, $ch(ST(\mathfrak{F}))=e^H$,

$$ch(TST(\mathfrak{F}))=e^H-\left(\int_{M^\dagger}e^H(1+\frac{5}{6}H)\right)1=e^H-5. \qquad \text{((23) を使う.)}$$

$ch(STST(\mathfrak{F}))=e^{2H}-5e^H$, $ch(TSTST(\mathfrak{F}))=e^{2H}-5e^H+10$, $ch(STSTST(\mathfrak{F}))=e^{3H}-5e^{2H}+10e^H$, $ch(TSTSTST(\mathfrak{F}))=e^{3H}-5e^{2H}+10e^H-10$, $ch((ST)^4(\mathfrak{F}))=e^{4H}-5e^{3H}+10e^{2H}-10e^H$, となり，

$$ch((TS)^5(\mathfrak{F}))=e^{5H}-5e^{4H}+10e^{3H}-10e^{2H}+5e^H=(e^H-1)^5+1=1$$

となって，(21) が得られる．

注：　$(ST)^5=1$ はコホモロジーレベルでは成立するが，$\mathbb{D}M^\dagger$ の自己同型の間の等式としては成立しない．$(ST)^5(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}[2]$ である[22].

5 次超曲面の場合の計算を，2-1,2-2 により密接に関わらせるには，次のように考える．$\mathcal{M}_c(M^\dagger)$ の 5 重被覆をとり，$\tau\in\mathbb{C}$ をパラメータにする族を考える．すると，原点は特異点でなくなり，$M^\dagger_\tau$ が特異になるのは，τ が 1 の 5 乗根である 5 点である．これらの 5 点でつぶれるラグランジュ S^3 を $L_1,\cdots,L_5$ とする．$M^\dagger$ から余次元 2 の部分多様体（ケーラー形式のポアンカレ双対）を除くと完全シンプレクティック多様体ができ，L_i はその中の完全ラグランジュ部分多様体になると思われる（未チェック）．この状況は，複素モース理論から directed A_∞ カテゴリーを作った [Se2], [Se3] の状況に当てはまり，その directed A_∞ カテゴリーは計算可能と思われる．

以上の考察の次元を 1 つ落とした場合を用いて，Seidel は 4 次曲面のミラー対称性を証明したのではないかと思うが，詳細は未出版のため不明．

[22] この注意は Seidel による．その，4 次曲面の場合のホモロジー的ミラー対称性の証明（およびその期待される一般化）において重要である．

なお，上の注意の $(ST)^5(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}[2]$ という事実は，L_i 達が，$\mathfrak{L}ag(M^\dagger)$ を生成することを示すのに使われるのであろう．

§3 自己同型の一致 II – Floer ホモロジーのガロア対称性と極大退化点でのモノド ロミー –

§2では，シンプレクティック多様体 M のシンプレクティック同相が，ミラーである複素多様体 $M^\dagger$ 上の連接層の導来圏 $\mathbb{D}M^\dagger$ の自己同型 (フーリエ・向井変換) で $M^\dagger$ の自己同型（双正則写像）からは導かれないものに対応する，という現象を眺めた．ここでは逆，すなわち複素多様体 $M^\dagger$ の「自己同型[23]」が，$\mathfrak{L}ag(M)$ の自己同型であって，M のシンプレクティック同相から導かれないものに対応する状況を説明したい．これは，Floer ホモロジーのガロア対称性と筆者が呼んでいるものにかかわり，ミラー対称性予想の正確な定式化を与えるために必要である．この節の参考文献は [Fu5] である．

3-1 極大退化点

まず Calabi-Yau 多様体の極大退化点について説明する[24]．（Large complex structure limit と呼ばれる．）

$$\pi : \mathfrak{M}^\dagger \to D^2$$

を $\mathbb{C}$ の円盤 D^2 でパラメータがつけられた複素多様体の族とする．$q \neq 0$ に対して，$M_q^\dagger = \pi^{-1}(q)$ は滑らかな Calabi-Yau 多様体であるとする．(その複素次元は n とする.) $M_0^\dagger$ は特異であるとするが，$\mathfrak{M}^\dagger$ のなかで $M_0^\dagger$ は正規交叉因子（normal crossing divisor）であるとする．このとき，族 $\mathfrak{M}^\dagger$ が極大退化族であるとは，

$$M_0^\dagger = \bigcup_i D_i$$

と規約成分の和に書いたとき，$n+1$ 個の D_i 達が交わっているような点が存在することをさす.

Hodge 構造の変形 (variation of Hodge structure) の言葉を使うと，次のように言い換えることができる．調和 $(i, n-i)$ 形式全体 $H^{i,n-i}(M_q^\dagger)$ は，q によらないベクトル空間 $H^n(M^\dagger;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ の部分空間とみなすことができる.（このことを用いて，$H^{i,j}(M_q^\dagger)$ をファイバーとするベクトル束には

[23]双正則同値とは多少ことなる．後に説明する．
[24]3-1 についての詳細は [LTY] 参照.

接続が入り，Gauss-Manin 接続と呼ばれる.）このとき，$H^{i,j}(M_q^\dagger)$ の基底 $e_{i,j;\ell}(q)$ をしかるべくとると

$$\frac{\partial}{\partial q} e_{i,j;\ell}(q) \in H^{i-1,j+1}(M_q^\dagger)$$

となるようにとることができる．これを Griffiths 横断性と呼ぶ．このことを用いると，$\gamma \in \pi_1(D^2 - \{0\})$ に沿った $H^n(M^\dagger;\mathbb{C})$ のモノドロミー（Gauss-Manin 接続に関する）N は

$$N(H^{i,j}(M_{q_0}^\dagger)) \subseteq \bigoplus_{i' \le i} H^{i',n-i'}(M_{q_0}^\dagger)$$

を満たす．N_0 を N が $H^{i,n-i}(M_q^\dagger)$ に引き起こす準同型を集めたものとする.（N_0 はユニタリで有限位数である.）すると，

$$(N - N_0)^{n+1} = 0$$

が得られる．極大退化点という条件は

$$(N - N_0)^n \neq 0$$

という条件に置き換えられる.（以上については [LTY] など参照.）いくつか例を述べておく．

一番簡単な例は，楕円曲線である．$\tau \in \mathfrak{h}$ に対して $T_\tau^2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$ とする．($\mathfrak{h}$ は上半平面をあらわす．) $x + iy \mapsto x + (x+y)i$ なる同型を用いれば，$T_\tau^2 \cong T_{\tau+1}^2$ がわかるので，$q = \exp(2\pi i\tau)$ とおくと，$q \in D^2 - \{0\}$ をパラメータとする楕円曲線の族が定まる．この族は，0 のファイバーを I 型特異点（S^2 が自分自身と 1 点で横断的に交わっているもの）とすることで，D^2 上の族になる．この場合のモノドロミーは $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

次に

$$q(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + x_0x_1x_2x_3 = 0$$

であらわされる $\mathbb{C}P^3$ の超曲面 (4 次曲面) の族がある．0 のファイバー $M_0^\dagger$ は $\mathbb{C}P^2$ が 4 個が横断的に交わった因子で，$(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ の 4 点を考えると，それらの点の周りでは 4 つのうちの 3 つの既約成分が交わっている．

その次元を一つ上げたものが $\mathbb{C}P^4$ の 5 次超曲面

$$q(x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5) + x_0x_1x_2x_3x_4 = 0$$

で，これも $M_0^\dagger$ は 5 個の $\mathbb{C}P^3$ が横断的に交わる因子で，5 点の周りでそのうち 4 つの既約成分が交わっている．

ついでに，次元が下がった

$$q(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) + x_0 x_1 x_2 = 0$$

は楕円曲線の族で，原点のファイバーは I_3 型の特異点である．これは，最初に考えた楕円曲線の族で底空間 $D^2 - \{0\}$ の 3 重被覆を取ったものである．

他にもいろいろな例があるはずだが，筆者はそれほど詳しくないのでこれだけにする．

3-2 モノドロミーと $\hat{\mathbb{Z}}$ 作用 – 複素多様体側の構成 –

ここで考える複素多様体側の対称性は，$[\gamma] \in \pi_1(D^2 - \{0\})$ に対応するモノドロミーである．といっても，$\pi : \mathfrak{M}^\dagger \to D^2$ の $D^2 - \{0\}$ への制限は，C^∞ 多様体の範疇では，局所自明なファイバー束であるが，複素多様体としては局所自明ではない．（M_q の複素構造は q が変わると動く．）それで，モノドロミーは双正則写像にはならない．そこで $\pi_1(D^2 - \{0\})$ の「$\mathbb{D}M^\dagger$」への作用を考えるには，次のようにする．（実は $\mathbb{D}M^\dagger$ の定義そのものを変える必要がある．）

D^2_m を 0 で m 重分岐した D^2 の m 重被覆とする．すなわち $D^2_m \to D^2$ を $q_m \mapsto q = q_m^m$ とする．（$q_m = q^{1/m}$．）$\pi : \mathfrak{M}^\dagger \to D^2$ を引き戻すと

$$\pi_m : \mathfrak{M}^\dagger_m \to D^2_m$$

ができる．（$D^2_m - \{0\}$ までは簡単に引き戻せるが，0 にどう拡張するのかは微妙である．とりあえず何でもいいから拡張しておく．）

また，$\epsilon > 0$ に対して，$D^2(\epsilon) = \{z \in \mathbb{C} | |z| < \epsilon\}$ とおく．$D^2_m(\epsilon)$ も同様に考える．$\pi_m^{-1}(D^2_m(\epsilon))$ のことを $\mathfrak{M}^\dagger_m(\epsilon)$ と書く．

ある m と ϵ に対する，$\mathfrak{M}^\dagger_m(\epsilon) - \pi_m^{-1}(0)$ 上の解析的連接層で，$\pi_m^{-1}(0)$ まで拡張されるもの $\mathfrak{F}$ を考える．このとき，$\mathfrak{F} \to \mathfrak{M}^\dagger_m(\epsilon) - \pi_m^{-1}(0)$, $\mathfrak{F}' \to \mathfrak{M}^\dagger_{m'}(\epsilon') - \pi_{m'}^{-1}(0)$ が同値とは，これらをある $\mathfrak{M}^\dagger_{\ell m m'}(\epsilon'') - \pi_{\ell m m'}^{-1}(0)$ まで引き戻して同型で，その同型写像が $\pi_{\ell m m'}^{-1}(0)$ まで有理型にのびること，と定義する．

このような層たちの間の準同型とは，ある $\mathfrak{M}^\dagger_m(\epsilon) - \pi_m^{-1}(0)$ に引き戻したときの準同型で，$\pi_m^{-1}(0)$ まで有理型に拡張されるものと定義する．こ

れでアーベル圏ができ，その導来圏を作ることができる[25]．この導来圏を $\mathbb{D}\mathfrak{M}^\dagger$ とかく．

次に，$\widehat{\mathbb{Z}}$ を $\mathbb{Z}$ の profinite completion とする．すなわち

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}_m, \qquad \text{(射影的極限.)}$$

$\mathfrak{M}^\dagger_m - \pi_m^{-1}(0)$ 上の層の成すカテゴリーには，$\mathbb{Z}_m$[26]が被覆変換群として，作用する．この作用を用いると，$\mathbb{D}\mathfrak{M}^\dagger$ への $\widehat{\mathbb{Z}}$ の作用を容易に作ることができる．$\mathbb{D}\mathfrak{M}^\dagger$ の元の間の射全体は

$$\varinjlim \mathbb{C}[[q_m]][q_m^{-1}], \qquad \text{(帰納的極限.)} \tag{26}$$

上のベクトル空間とみなすことができる[27]．(26) の体は，形式的ローラン級数体 $\mathbb{C}[[q]][q^{-1}]$ の代数的閉包である．これを $\Lambda_{nov}^{\mathbb{Q}}$ と書く．$\widehat{\mathbb{Z}}$ はガロア拡大 $\Lambda_{nov}^{\mathbb{Q}}/\mathbb{C}[[q]][q^{-1}]$ の連続ガロア群である．

注：　$\Lambda_{nov}^{\mathbb{Q}}$ は $\sum_i a_i q^{\lambda_i}$ $a_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty$, なる形式和全体である．シンプレクティック幾何学においては，この体は普遍 Novikov 環として現れた．

幾何学的に言うと，$\Lambda_{nov}^{\mathbb{Q}}$ は $D^2 - \{0\}$ の「代数的普遍被覆」の関数体であり，$\widehat{\mathbb{Z}}$ は $D^2 - \{0\}$ の「代数的基本群」である．

カテゴリー $\mathbb{D}\mathfrak{M}^\dagger$ への $\widehat{\mathbb{Z}}$ の作用は，ガロア群としての $\widehat{\mathbb{Z}}$ の $\Lambda_{nov}^{\mathbb{Q}}$ の作用と整合的である．すなわち，次のことが成り立つ．

$\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ を $\mathbb{D}\mathfrak{M}^\dagger$ の対象とすると，$Hom(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$ は $\Lambda_{nov}^{\mathbb{Q}}$ ベクトル空間になる．このとき，$\rho \in \widehat{\mathbb{Z}}$ とすると，$\widehat{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{D}\mathfrak{M}^\dagger$ への作用は

$$\rho_* : Hom(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}') \to Hom(\rho(\mathfrak{F}), \rho(\mathfrak{F}'))$$

を定める．これは，$f \in Hom(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$, $c \in \Lambda_{nov}^{\mathbb{Q}}$ に対して，

$$\rho_*(cf) = \rho(c)\rho_*(f) \tag{27}$$

[25]この辺の構成は代数幾何ではおなじみのものであろう．エタール何とかとか，ログ何とか，とか形式的何とか，とかではないかと思うが，勉強しきれていないので，正式の名称をしらない．

[26]$\mathbb{Z}_m$ は位数 m の巡回群のこと．

[27]これは $\epsilon \to 0$ なる極限をとっていることに対応する．実は上に書いたとおりだと，形式的冪級数体 $\mathbb{C}[[q_m]][q_m^{-1}]$ でなくて，収束的ローラン級数環が出てくる．それで，射の定義を少し変えて，形式的ローラン級数体上のベクトル空間になるようにしておく．(単にテンソル積を取って係数拡大するだけ.)

を満たす．ここで $\rho(c)$ は ρ の $\Lambda_{nov}^{\mathbb{Q}}$ へのガロア群の元としての作用である．

以上のように書くといかにも物々しいが，実は構成を見てみると (27) は明らかである．

3-3 Floer ホモロジーのガロア対称性 – シンプレクティック多様体側の構成 –

ホモロジー的ミラー対称性を正確に定式化するには，$\mathbb{D}M^\dagger$ ではなく，$\mathbb{D}\mathfrak{M}^\dagger$ を使う方がよい．理由はいくつかある．

(1)　一般の (極大退化点から遠い) 複素多様体 $M^\dagger$ が M のミラーであるとき，$M^\dagger$ の解析的連接層で M のラグランジュ部分多様体から来ないものがある[28]．Kaupstin-Orlov[KO] によると，アーベル多様体の場合ですでにそのような例を作ることができるという[29]．正しい定式化は，固定した $M^\dagger$ 上の解析的連接層ではなく，極大退化点の近傍の各 M_q に対して，その上の解析的連接層が定まり，それが q を動かしたとき複素解析的な族をなしているとき (より正確にはパラメータ q は，3-2 でそうしたように，然るべき有限被覆に持ち上げる必要がある)，それに対してラグランジュ部分多様体（特異点を許すなど一般化が必要であるが）が定まるとすべきである．この状況では，複素多様体上の正則ベクトル束からラグランジュ部分「多様体」を作る構成が，T^4 の場合に西納の博士論文 [Ni] で行われている．

(2)　シンプレクティック多様体側で，単独のシンプレクティック多様体から出発しても，実はシンプレクティック形式の定数倍を考えることで，複素 1 次元の族ができている．この点は 3-3 で説明する．

(3)　シンプレクティック多様体のラグランジュ部分多様体の Floer ホモロジーは係数環として，$\Lambda_{nov,0}^{\mathbb{R}}$(後で定義する) を持つ．これは形式的冪級数環の一種である．この形式的パラメータにある定数を代入することが許されれば，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間ができる．これは (2) の族から 1 点を指

---

[28] Calabi-Yau 多様体でそのミラーが存在すると考えづらいもの，たとえば変形が存在せず rigid なもの，が知られているという．ラグランジュ部分多様体から来ない連接層，は，この現象の D ブレーン版と考えられるのではないだろうか．極大退化点から離れた場所でのミラー対称性は，まだ未知の部分が非常に多くあると思われる．

[29] しかし，Kaupstin-Orlov はこの点を重大に捉えすぎており，ラグランジュ部分多様体に対応するのは，因子だけでランクが 2 以上のベクトル束のシンプレクティック多様体側のアナロジーを見つける必要があるなどとと書いている．これは完全な誤解である．(ランク 2 以上のベクトル束がホモロジー的ミラー対称性でラグランジュ部分多様体に移る例はトーラスの場合でもいくらでもある．) しかし，彼らが提案した coisotropic 部分多様体を考えるというアイデアは，極大退化点から離れた点でのミラー対称性を考える上では面白いと思う．

定することに対応する．しかし，収束が証明されておらず，代入はできない．そこで，むしろ形式的な族を考え，形式的冪級数の範疇で考える必要がある．

以下上記の (2),(3) について，より詳しく説明し，それが，3-2 のシンプレクティック側の対応物の構成にどう関わるかを説明する．

ミラー対称性のシンプレクティック多様体側では (M,ω) を考えたが，元来は $(M,\omega+2\pi\sqrt{-1}B)$ が考えられていた．ここで B は B 場と呼ばれ，ここでは閉 2 次形式としておく．実際，$H^{1,1}(M)\cong H^1_{\bar\partial}(M^\dagger)$ と書いたとき，少しごまかしていて，右辺は複素ベクトル空間, 左辺は実ベクトル空間である．本当は左辺は $H^{1,1}(M)\otimes\mathbb{C}$ と書くべきである．するとこれを接空間にもつモジュライ空間はシンプレクティック構造のモジュライ $\mathcal{M}_s(M)$ ではなくて，その複素化というべき，$(M,\omega+2\pi\sqrt{-1}B)$ たちのモジュライである．

ここで大事な役割を果たすのが，次の事実である．

仮説． $B_0\in H^2(M;\mathbb{Z})$ のとき，$(M,\omega+2\pi\sqrt{-1}B)$ と $(M,\omega+2\pi\sqrt{-1}(B+B_0))$ のミラーは同一の複素多様体になる．

この現象の具体例や説明は徐々に出てくる．

B 場があるとき，対応するブレーンのモジュライは $L\subset M$ なるラグランジュ部分多様体とその上の $U(1)$ 接続 ∇ 付きベクトル束 $\mathfrak{L}$ であって，

$$F_\nabla = 2\pi\sqrt{-1}B \tag{28}$$

を満たすものの組とする．(左辺は曲率.)（ただし本稿ではこの場合はでてこない.）

さて極大退化点に対応するシンプレクティック多様体（+B 場）の族を見つけるには，次のようにする．(M,ω) をシンプレクティク多様体とし，

$$[\omega]\in H^2(M;\mathbb{Z}) \tag{29}$$

を仮定する．すると，$\tau\in\mathfrak{h}$ に対して，$-\sqrt{-1}\tau\omega = (\mathrm{Im}\tau)\omega-(\mathrm{Re}\tau)\omega$ はシンプレクティイク形式＋ B 場になる.（$\mathfrak{h}$ は上半平面をさす．すなわち，$\mathrm{Im}\tau>0$.）この族 $(M,-\sqrt{-1}\tau\omega)$ を考える．そのミラーを $(M^\dagger,J_\tau)$ とする．

$$-\sqrt{-1}\tau\omega - -\sqrt{-1}(\tau+1)\omega\in\sqrt{-1}H^2(M;\mathbb{Z})$$

であるから，仮説 1 を認めると，$(M^\dagger,J_\tau)\cong(M^\dagger,J_{\tau+1})$ である．よって，$q=\exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ と置くと，$(M^\dagger,J_q)$ なる $D^2-\{0\}$ をパラメータにもつ族 $\mathfrak{M}^\dagger$ ができる．これが極大退化点になると予想される．まとめると，

予想 5. (29) を満たすシンプレクティック多様体に対して，極大退化点を与える複素多様体の族 $\mathfrak{M}^\dagger$ が対応する[30].

例として，トーラス (楕円曲面) を考えよう．$M = (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, dx \wedge dy)$ とおく．このとき，$(M^\dagger, J_\tau)$ は実は $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$ になることが分かる．

高次元のトーラスでも例を作ることができる．$\Gamma \subset \mathbb{Z}^n$ を有限指数部分群とする．$\mathbb{R}^{2n}$ に，$\sum dx^i \wedge dy^i$ でシンプレクティック構造を入れる．$\Gamma \times \mathbb{Z}^n$ でこれを割ると，(T^{2n}, ω) が得られる．そのミラー (族) は $\mathbb{R}^n/\Gamma \times \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ に $z^i_\tau = x^i + \tau y^i_*$ が複素座標になるように複素構造を入れたもの (T^{2n}, J_τ) である．(x^i は $\mathbb{R}^n/\Gamma$ の y^i_* は $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ の座標．)

$(T^{2n}, J_\tau) \cong (T^{2n}, J_{\tau+1})$ は

$$(x^i, y^i_*) \mapsto (x^i, x^i + y^i_*)$$

で与えられる．$\mathrm{Im}\tau \to \infty$ とすると，(T^{2n}, J_τ) の第 2 成分のトーラスがつぶれて T^n に収束する．あるいは，複素幾何 (代数幾何）の言葉で言うと，原点 $q = 0$ に置くべきファイバーには，$\sharp(\mathbb{Z}/\Gamma)$ 個の既約成分を持ち，交わり方も，$\mathbb{Z}$ の点の $\mathbb{R}^n/\Gamma$ での配置で見える.（トーラスの場合は，0 のファイバーは標準的なとり方があって，Néron モデル [Ne][31]と呼ばれる.）

以下 3-3 の残りでは，予想 5 を前提に，シンプレクティック多様体側での，極大退化点の周りのモノドロミーの対応物を説明する．

まず，Floer ホモロジーの係数環について説明する．Floer ホモロジーは完全シンプレクティック多様体の完全ラグランジュ部分多様体の場合には $\mathbb{Z}$（あるいは向きの議論をサボれば $\mathbb{Z}_2$）上の加群になるが，一般にはそうはならない．これは，Floer ホモロジーが多価モース関数 (あるいは閉 1 形式) のモース理論から定まることが理由であり，有限次元の場合に閉 1 形式のモース理論を考えた Novikov[No] は Novikov 環という環を係数環にした．ミラー対称性を考えるときは，次の形式的冪級数環の類似（われわれは普遍 Novikov 環と呼んでいる）を用いるのが都合がよい．すなわち，$\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,0}$ なる環を $\sum_i a_i q^{\lambda_i}$ $a_i \in \mathbb{C}, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0, \lim_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty$, なる形式和全体とする．この環は 3-2 でに出てきた $\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov}$ の整数環である．また，$\lambda_i \in \mathbb{R}$ を $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ で置き換え，$\Lambda^{\mathbb{Q}}_{nov,0} = \Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,0} \cap \Lambda^{\mathbb{Q}}_{nov}$ と定義する．

Floer の鎖複体は実は $\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,0}$ 上の複体である．すなわち，L_1, L_2 が $c_1(M) = 0$ なるシンプレクティック多様体の Maslov 指数が 0 のラグランジュ部分

[30] 任意のシンプレクティック多様体にミラーがあるわけではないから，(29) を満たす任意のシンプレクティック多様体に対して，族 $\mathfrak{M}^\dagger$ が定まるわけではない.

[31] 数論的代数幾何にもかかわる深い部分で，ろくに勉強せずによく分かっているかのごとくに書くのが心苦しいが …

多様体（スピン構造を持つと仮定する）とすると，

$$CF(L_1, L_2) = \bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,0}[p]$$

である[32]．Novikov 環が出てくる理由は境界作用素を考えるとはっきりする．すなわち，

$$\partial[p] = \sum_{q \in L_1 \cap L_2} \sum_{\varphi} \pm q^{\int \varphi^* \omega}[q] \tag{30}$$

である．ここで，φ に関する総和は，$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \to M$ なる擬正則写像で，$\varphi(0,t) \in L_1$, $\varphi(1,t) \in L_2$, $\lim_{t \to -\infty} \varphi(s,t) = p$, $\lim_{t \to +\infty} \varphi(s,t) = q$ なるもの（の $\mathbb{R}$ 作用に関する同値類）を動く[33]．Floer ホモロジーで形式的冪級数が必要になるのは，(30) の右辺の収束性 (十分小さい q に対する) が示されていないからである．

まとめると，一般の状況では Floer ホモロジーすなわち $\mathfrak{L}ag(M)$ における射の集合は，$\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,0}$ 上の自由加群である．

さて，前節ででてきたのは $\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov}$ ではなくて，$\Lambda^{\mathbb{Q}}_{nov}$ である．この差を議論するために有理ラグランジュ部分多様体という概念を定義する．まず，$[\omega] \in H^2(M;\mathbb{Z})$ であったことに注意する．すると，$(\mathcal{L}, \nabla) \to M$ という M 上の $U(1)$ 束とその上の接続があり，

$$F_{\nabla} = 2\pi\sqrt{-1}\omega$$

である．$(\mathcal{L}, \nabla)$ を前量子化束 (prequantum bundle) とよぶ．ラグランジュ部分多様体 $L \subset M$ に $(\mathcal{L}, \nabla)$ を制限すると，平坦になる．

定義 8.　L が有理ラグランジュ部分多様体とは，$(\mathcal{L}, \nabla)$ の L への制限のモノドロミー表現 $\pi_1(L) \to U(1)$ の像が有限群であることを言う[34]．

有理ラグランジュ部分多様体 L に対して，$[\psi] \in \pi_2(M, L)$ とすると，

$$\int \psi^* \omega \in \mathbb{Q}$$

[32][FOOO] では q の代わりに T を記号として使った．また，そこではもうひとつの形式的変数 e があった．これはミラー対称性の研究で使われる状況（Maslov 指数が 0 のとき）では不要である．

[33]本当は Floer ホモロジーの定義にかかわる障害を消すための b が入る項が付く．b については次の節を参照.

[34]$(\mathcal{L}, \nabla)$ の L への制限が自明なとき，ボーア・ゾンマーフェルト軌道という（ボーア・ゾンマーフェルトのスペルは何回も間違えたので，ここではカタカナにする.）.

が示される．このことを用いると，有理ラグランジュ部分多様体の場合には，Floer ホモロジー群の係数群が $\Lambda^{\mathbb{Q}}_{nov,0}$ になることが分かる．

さて，$\mathfrak{L}ag(M)$ の対象をもう少し正確に書くと，$(\mathcal{L}, \mathfrak{L}, b)$ である．ここで，L はラグランジュ部分多様体であるが，ここでは有理ラグランジュ部分多様体であると仮定する．$\mathfrak{L}$ は L 上の平坦 $U(1)$ 束である．b については次節を参照．この A_∞ カテゴリーを $\mathfrak{L}ag_{\mathrm{rat}}(M)$ と書くことにする．

定理 5. $\mathfrak{L}ag_{\mathrm{rat}}(M)$ には $\hat{\mathbb{Z}}$ の作用がある．対象に対しては，$1 = \rho \in \hat{\mathbb{Z}}$ の作用は，$(L, \mathfrak{L}, b) \mapsto (L, \mathfrak{L} \otimes (\mathcal{L}, \nabla), b^\rho)$ で与えられる．射に対する作用は $\hat{\mathbb{Z}}$ の $\Lambda^{\mathbb{Q}}_{nov,0}$ へのガロア群としての作用と整合的である．

b はとりあえず無視すると，$(L, \mathfrak{L})$ は $(L, \mathfrak{L} \otimes (L, \nabla))$ に移る．ρ の作用は $\tau \mapsto \tau + 1$ という対称性に対応していた．これが，A_∞ カテゴリーの対称性にあがるというのが，定理の主張である．定理 5 の対称性が，3-1 のモノドロミー対称性にミラーで移りあうとみられる．すなわち，

予想 6. $\mathfrak{L}ag_{\mathrm{rat}}(M)$ の導来圏は（$\hat{\mathbb{Z}}$ の作用もこめて）$\mathbb{D}\mathfrak{M}^\dagger$ と同型である．

これが，ホモロジー的ミラー対称性予想の，筆者が考える限り，現在最も正確な定式化である．両辺がきちんと定義されているという意味で，括弧付きでないちゃんとした数学の予想であり，このまま成り立つと期待される．

注： 複素多様体側では，射の合成などカテゴリーの定義に現れる写像は，実はある q_m の収束冪級数である．したがって，予想 6 が正しければ，Floer ホモロジーの境界作用素，積構造などは，ホモトピー同値で移すと，収束することがわかる．Floer ホモロジーの境界作用素，積構造などの収束を示すプログラムとしては，現在これが唯一実行可能ではないかと筆者に思われる方針であり，解析で直接擬正則円盤の数を評価することはそれよりはるかに難しいと思われる．これは，いわば，Artin の代数化定理 (たとえば [Ar]，その後に Algebraization of formal moduli という一連の論文も出ている) や Formal scheme を用いて，収束を示すことになる．Kontsevich-Soibelman[KS] の rigid analytic geometry を使うという提案も，同種のものと思われる．物理にこの種の議論が応用できれば，Artin の代数化定理や Formal scheme がファインマン径路積分の収束証明に使われる，という代数幾何学者が大喜びしそうなシナリオになるのだが．

定理 5 の対称性は楕円曲線の場合に具体的に書くことができ，テータ関数の関数等式

$$\Theta(\tau, z) = \Theta(\tau + 1, z)$$

になる ([Fu5] をみよ)．これはテータ関数の関数等式のやさしいほうで，深いほう

$$\Theta(-1/\tau, z/\tau) = e^{-\pi\sqrt{-1}/4}\Theta(\tau, z)$$

をシンプレクティック側から見ることは難しい．楕円曲線のモジュライのカスプにあたる点は極大退化点で，その近傍でミラー対称性は一番明確に存在している．$\tau \mapsto \tau + 1$ はカスプの近傍での対称であり，したがって，ミラー対称性でみやすい．$\tau \mapsto 1/\tau$ はカスプを保たず，より深いと思われる．すなわち結合定数の大きいものと小さいものをひっくり返す,「双対性」のほうであると思われ，ミラー対称性からはなかなかみえない．

§4 変形理論の類似，擬正則円盤および高次種数の境界付リーマン面の数え上げ

4-1 変形理論とホモトピー代数

変形理論の類似，特にシンプレクティック多様体側（ラグランジュ部分多様体）の話は，筆者は何回も書いているので，できる限り短くすませる（それがすんだ後の 4-3 が新しい部分である）．またミラー対称性とかかわる部分に限る．[Fu3] が今のところ一番詳しく書いた解説である．([FOOO] の改訂版に証明の細部も含めて述べる．Kontsevich-Soibelman が本を書いているそうで目次だけ見せてもらった．)

まず複素多様体側から話を始める．$M^\dagger$ を複素多様体とし，$\mathfrak{E} \to M^\dagger$ をその上の正則ベクトル束とする．$End(\mathfrak{E})$ も正則ベクトル束であるから，それを係数とする Dolbeault 複体 $\Omega^{0,*}(End(\mathfrak{E}))$ を考えることができる．これには，微分 $\overline{\partial}$ のほかに，積 $\wedge$ が定まっている．すなわち，$End(\mathfrak{E})$ 成分では，写像の合成を，$\Omega^{0,*}$ 側では微分形式の外積を取る．$(\Omega^{0,*}(End(\mathfrak{E})), \overline{\partial}, \wedge)$ は次数付き微分多元環（differential graded algebra, 以後 DGA と略す）になる．すなわち，

$$\overline{\partial}^2(u) = 0, \qquad \overline{\partial}(u \wedge v) = (\overline{\partial}u) \wedge v \pm u \wedge (\overline{\partial}v)$$

が成り立つ.（本稿では符号についての議論は省略する.）以後 DGA には単位元 1 があるとする．DGA$(\Omega^{0,*}(End(\mathfrak{E})), \overline{\partial}, \wedge)$ は自分自身の上の次数付き微分加群（differential graded module, 以後 DGM[35] と略す）になる．（DGM の定義も含めて読者に演習として残す.）

[35]DAG は標準的な略語だが DGM が標準的かどうかは知らない．

補題 2．$(\Omega^{0,*}(End(\mathfrak{E})), \overline{\partial}, \wedge)$ の DGM としての変形と，正則ベクトル束 $\mathfrak{E}$ の正則ベクトル束としての変形は 1 対 1 に対応する[36]．

$\mathfrak{E}_s$ なる変形があったとき，$Hom(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_s)$ 係数の Dolbeault 複体は DGA, $(\Omega^{0,*}(End(\mathfrak{E})), \overline{\partial}, \wedge)$ 上の DGM になる．逆側の証明は省略する．

補題 2 によって，ベクトル束の変形の問題が，代数の問題 (DGM の変形の問題) になったわけだが，後者の Versal family を与えるのが Maurer-Cartan スタックである．これを定義しよう．$(C, d, \wedge)$ を DGA とすると，集合 $\widehat{\mathcal{M}}(C, d, \wedge)$ を $b \in C^1$ であって，

$$db + b \wedge b = 0 \tag{31}$$

を満たすもの全体とする．(31) と通常の Maurer-Cartan 方程式の関係は，明らかであろう．((31) も Maurer-Cartan 方程式と呼ぶ．)(31) の解を [FOOO] では bounding chain[37]と読んでいる．Maurer-Cartan 元と呼んでいる人もいる．さて $b \in \widehat{\mathcal{M}}(C, d, \wedge)$ とすると，C 上に DGM の構造が

$$d_b(x) = dx + b \wedge x, \qquad a \wedge_b x = a \wedge x \tag{32}$$

で決まる．(つまり微分だけ変えて，加群構造は変えない．) Maurer-Cartan 方程式は (32) が DGM になるという式を書き換えたものである．$(C, d_b, \wedge)$ が $(C, d_{b'}, \wedge)$ に DGM として同型なとき，$b \sim b'$ と書き，b と b' はゲージ同値と呼ぶ[38]．$\widehat{\mathcal{M}}(C, d, \wedge)$ の元のゲージ同値類全体を $\mathcal{M}(C, d, \wedge)$ と書いて Maurer-Cartan スタックと呼ぶ[39]．

補題 3．C を DGA とするとき，$\mathcal{M}(C)$ の原点の近傍は，C の DGM としての変形の versal moduli である．

証明：　C を DGM として変形し $(C, d_s, \wedge_s)$ すると，C はベクトル空間としては変わっていないはずだから，$x \mapsto x \wedge_s 1$ で同型 $C \to C$ を定める．すると $\wedge_s = \wedge$ としてよいことが分かる．次に $d_s = d + b_s$ とすれば，$b_s \in \mathcal{M}(C)$ である．

---

[36] 補題として正確に定式化するには，位相を入れるなりして，変形の意味をはっきりしないといけないがこれも省略する．

[37] 日本語訳を決めていないので，このままにしておく．そのうち考えます．

[38] この定義はある定理の結論を定義に使ったようなもので安直過ぎる．もっといい定義があるが，書くと長くなるのでサボる．[Fu3] または [FOOO] の改訂版をみよ．

[39] スタックの構造を入れるのは結構大変である．定義方程式はもう少ししたら出てくる．

2つの補題を合わせると，正則ベクトル束 $\mathfrak{E}$ の変形が Maurer-Cartan スタック $\mathcal{M}(\Omega^{0,*}(End(\mathfrak{E})),\overline{\partial},\wedge)$ であらわされることになる．(もちろんこの場合の (31) は変形理論でおなじみの方程式だから，こんな回りくどく言わなくてもいいが.)

多くの読者がご承知のように，ベクトル束のモジュライは局所的には倉西写像

$$H^1_{\overline{\partial}}(M^\dagger;End(\mathfrak{E})) \to H^2_{\overline{\partial}}(M^\dagger;End(\mathfrak{E}))$$

の零点としてあらわされる．次に，倉西写像の構成を代数化して，一般の DGA の Maurer-Cartan スタックに対して行うやり方を説明し，さらに倉西写像の冪級数展開が積構造と関わる様子を説明する．DGA の範囲でのこれらのことについての参考文献は Goldmann-Millson[GoM] で，とくに Maurer-Cartan スタックが DGA のホモトピー型で決まることを証明されいる．

ここでは違ったやり方をとり，まず話を A_∞ 代数に一般化する．$(C,\mathfrak{m}_k)$ $(k=1,2,\cdots)$ が A_∞ 代数であるとは，以下の条件 (1),(2),(3), が満たされることをさす.

(1)　C は次数付きベクトル空間.

(2)　$C[1]^k=C^{k+1}$ とおく．このとき，

$$\mathfrak{m}_k : C[1]^{k\otimes} \to C[1]$$

は次数 1 の線形写像である.

(3)

$$\sum_{k+\ell=n+1}\sum_{a=0}^{n-\ell}\pm\mathfrak{m}_k(x_1,\cdots,\mathfrak{m}_\ell(x_{a+1},\cdots),\cdots,x_n)=0.$$

$\mathfrak{m}_k$ が $k>2$ で全て 0 とすると，$\mathfrak{m}_1=\pm d$, $\mathfrak{m}_2=\pm\wedge$ とおいて，DGA が得られる．(符号は微妙であるが省略する.)

A_∞ 代数 C に対して，$\mathfrak{m}_1^2=0$ であるので，そのコホモロジー $H(C)$ が決まる．$\mathfrak{m}_2$ はその上の結合的な積を決める.

A_∞ 加群という概念が同様に定義され補題 2 が成り立つ[40].

Maurer-Cartan スタックの概念も一般化される．すなわち，

$$\sum_{k\geq 1}\mathfrak{m}_k(b,\cdots,b)=0 \tag{33}$$

[40]証明は [FOOO] の改訂版の Chapter 4 でのべる.

$(b \in C^1)$ が (31) の一般化である．ただし (33) の左辺は (31) と違って無限和であるので注意を要する．収束 A_∞ 代数とでもいうべき概念を定式化するのが一つの方法であるが，この方法は後で述べるラグランジュ部分多様体から定まる A_∞ 代数には使えない．そこで，次のようにする．

Λ を完備局所環とする．($\Lambda = \mathbb{C}[[q]]$ あるいは，$\Lambda_{nov}^{\mathbb{Q}}$ の整数環 $\Lambda = \Lambda_{nov,0}^{\mathbb{Q}} = \{\sum a_i q^{\lambda_i} \in \Lambda_{nov}^{\mathbb{Q}} | \lambda_i \geq 0\}$ を考えればよい．) Λ_+ をその極大イデアルとし，$b \in \Lambda_+ \otimes C^1$ に対して，(33) を考える[41]．このとき，左辺は (完備性により) 収束する．たとえば，$\Lambda = \mathbb{C}[[q]]$ のときは，b は q で割れるということだから，(33) の $\mathfrak{m}_k$ のでてくる項は q^k で割り切れ，したがって，(33) の右辺は形式的冪級数として意味を持つ．ゲージ同値の概念も同様に定義できる．すなわち，

$$\mathcal{M}(C)(\Lambda) = \{b \in \Lambda_+ \otimes C^1 | (33)\} / (\text{Gauge equivalence})$$

で A_∞ 代数の Maurer-Cartan スタックを定義する.（正確には $\Lambda \mapsto \mathcal{M}(C)(\Lambda)$ なる函手と見る ([Fu3] を見よ).）

さて，次に 2 つの A_∞ 代数 $(C, \mathfrak{m}_k)$,$(C', \mathfrak{m}'_k)$ があったとき，その間の A_∞ 写像の定義をする必要があるが，これは省略する．A_∞ 写像 φ はコホモロジーの間の写像 $H(C) \to H(C')$ を導くが，これが同型であるとき，φ はホモトピー同値であるという[42]．次の定理が成り立つ．

定理 6. Maurer-Cartan スタックはホモトピー同値で不変である．

証明は [FOOO] の改訂版または [Fu3] 参照.（DGA 版が [GoM] にある.）

定理 6 を使って，倉西写像 (Maurer-Cartan スタックの定義方程式) と，コホモロジー上の積構造の関係を見たい．それには，次の定理を使うのが一番明快である．A_∞ 代数 $(C, \mathfrak{m})$ が標準的 (canonical) であるとは，$\mathfrak{m}_1 = 0$ であることを指す．すなわち $H(C) \cong C$ が標準的であることの条件である．

定理 7. 任意の A_∞ 代数は標準的な A_∞ 代数とホモトピー同値である．

定理 7 で得られる A_∞ 代数を標準モデルと呼ぶことにする．

この種の定理を最初に示したのは (A.Schwarz によると)[Ka] だそうである．[KS] と [Fu3] には，ファインマン図を使った証明がのっている．こ

[41] $\Lambda_{nov,0}^{\mathbb{Q}}$ の極大イデアル $\Lambda_{nov,+}^{\mathbb{Q}}$ は $\{\sum a_i q^{\lambda_i} \in \Lambda_{nov}^{\mathbb{Q}} | \lambda_i > 0\}$ である．

[42] これもごまかした定義で，本来のホモトピー同値の定義は，逆向きの写像があって，合成が恒等写像にホモトピックでであること，である．ホモロジーに同型を導くこととこの定義が同値であることは定理である．(A_∞ 代数に対する Whitehead の定理の類似. [FOOO] をみよ．)

の定理はたとえば繰り込み理論などとも関わると思われるが，ここではこれ以上述べない．

さて，定理6,7より，Maurer-Cartan スタックを調べるには，標準的な A_∞ 代数だけを考えればよい[43]．標準的な A_∞ 代数の場合には，Maurer-Cartan 方程式 (33) は $b \in H^1(C) \otimes \Lambda_+$ に対して定義され，

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mathfrak{m}_k(b, \cdots, b) = 0. \tag{34}$$

である．m_k はこの状況では

$$\mathfrak{m}_k : (H^1(C))^{k\otimes} \to H^2(C)$$

である．$\mathfrak{m}_2$ はカップ積，$\mathfrak{m}_3$ は Massey 積などになる．(34) の左辺がこの場合の倉西写像であるとから，結局，倉西写像の冪級数展開がコホモロジー上の積構造に一致するという，§1で述べた主張が示されたことになる．

4-2 Floer ホモロジー定義のための障害と変形理論．

4-1 の議論のシンプレクティック多様体側での類似物を構成したい．すなわち，ラグランジュ部分多様体 L から Maurer-Cartan スキーム $\mathcal{M}(L)$ を作りたい．4-1 の一般論からは，A_∞ 代数を作ればよいのだが，実は少し変更が必要である．すなわち，4-2 では，A_∞ 代数は $\mathfrak{m}_1$ から始まっていたのだが，ここでは $\mathfrak{m}_0$ から出発する必要がある．これがフィルター付き A_∞ 代数である．4-1 では一般の完備付置環 Λ を使ったから，その言葉にしておく．(完備離散付置環だけを考えたのではでは不十分で，$\Lambda_{nov,0}^{\mathbb{Q}}$ は離散付置環ではない．任意の完備付置環で以下の議論が成り立つかどうか証明をチェックしていない．$\Lambda_{nov,0}^{\mathbb{Q}}$ と $\Lambda_{nov,0}^{\mathbb{R}}$ を考えていただきたい[44]．) C を次数付き自由 Λ 加群とする．$C[1]$ を前と同様に定め，

$$\mathfrak{m}_k : C[1]^{k\otimes} \to C[1]$$

なる次数 1 の連続 Λ 準同型を考える．まず

$$\mathfrak{m}_0 \equiv 0 \mod \Lambda_+$$

[43] 出発するのが DGA でも標準的モデルは DGA ではなく，A_∞ 代数である．

[44] この辺は本格的な可換環論の一部で，筆者のような素人が山勘で大丈夫だろうなどというと間違いそうなところであるから，安全のためこう書いておく．また，標数は 0 でないと，ホモトピー代数で困る点がある．

を仮定する．また

$$\sum_{k+\ell=n+1}\sum_{a=0}^{n-\ell}\pm\mathfrak{m}_k(x_1,\cdots,\mathfrak{m}_\ell(x_{a+1},\cdots),\cdots,x_n)=0. \tag{35}$$

が成り立つとする．これがフィルター付き A_∞ 代数である．

注：　(35) の右辺では，$\ell=0$ の場合が入っており，それに対応する項は

$$\mathfrak{m}_{k+1}(x_1,\cdots,x_a,\mathfrak{m}_0(1),x_{a+1},\cdots,x_n)$$

である．

$\mathfrak{m}_0$ が 0 でないので，

$$\mathfrak{m}_1^2(x)=\pm\mathfrak{m}_2(\mathfrak{m}_0(1),x)\pm\mathfrak{m}_2(x,\mathfrak{m}_0(1))$$

となり一般には $\mathfrak{m}_1$ は微分ではない．しかし，Maurer-Cartan 方程式は同様に定義できる．すなわち，

$$\sum_{k\geq 0}\mathfrak{m}_k(b,\cdots,b)=0 \tag{36}$$

である．(36) の $k=0$ に対応する項は $\mathfrak{m}_0(1)$ である．これは一般には 0 でないから，$b=0$ は (36) の根ではない．これが注意を要する点である．

フィルター付き A_∞ 代数に 4-1 の内容を一般化するとき，変更を要する主な点を以下に記す．

まず，ホモトピー同値の定義に問題が生じる．(コホモロジーがないので.）しかし，$\mathfrak{m}_0\equiv 0$ を仮定していることに注意して，$R=\Lambda/\Lambda_+$ に係数を落とす．すなわち $\overline{C}=C/\Lambda_+C$ とし，$\overline{\mathfrak{m}}_k\equiv\mathfrak{m}_k \mod \Lambda_+$ とする．すると，$(\overline{C},\overline{\mathfrak{m}}_k)$ は R を係数とする A_∞ 代数になり，特に $\overline{\mathfrak{m}}_1^2=0$ である．よって，コホモロジー $H(\overline{C})$ が定義される．フィルター付き A_∞ 写像がホモトピー同値であるとは，コホモロジー $H(\overline{C})$ に導かれる準同型が同型であること，と定義する．すると定理 6 はそのまま成立する[45]．

次に標準的の定義は $\mathfrak{m}_1\equiv 0 \mod \Lambda_+$ とする．すると，定理 7 が成立する．

[45] フィルター付き A_∞ 代数に対して，strongly gapped という条件をつける必要がある．

さて，Cが標準的なフィルター付きA_∞代数とすると，$C = H(\overline{C}) \otimes_R \Lambda$である[46]．そして倉西写像は

$$\mathrm{Kura} : H^1(\overline{C}) \otimes \Lambda_+ \to H^2(\overline{C}) \otimes \Lambda_+$$

として定まる．Kuraの0次の項は$\mathfrak{m}_0(1)$, で1次の項は$b \mapsto \mathfrak{m}_1(b)$である．いずれも $\mod \Lambda_+$で0(言い換えると$q = 0$で消える.）4-1での普通の倉西写像は2次の項から始まっていた．Kuraの冪級数展開の2次以上の項が積構造に対応する点は同じである．Maurer-Cartanスタックが空でないと，その点を0に取り直すことでKuraの0次の項すなわち$\mathfrak{m}_0$を消すことができる．このようにすれば4-2の定式化から4-1の定式化に移ることができる．

以上で代数の解説は一応終わったから，幾何に戻る．基本定理は次のものである．Mをシンプレクティック多様体$c_1(M) = 0$, $L \subset M$をラグランジュ部分多様体とし，Lは(相対)スピン構造を持ち，さらにマスロフ指数$\pi_2(M, L) \to \mathbb{Z}$は0と仮定する．

定理8.([FOOO])　フィルター付きA_∞代数$(C(L), \mathfrak{m}_k)$が存在し，$(\overline{C(L)}, \overline{\mathfrak{m}}_k)$は$L$のド・ラーム複体にホモトピー同値である．$(C(L), \mathfrak{m}_k)$のホモトピー型は$L$のハミルトン変形で不変である．

$(C(L), \mathfrak{m}_k)$の係数環Λは一般には$\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,0}$，$L$が有理的なら$\Lambda^{\mathbb{Q}}_{nov,0}$である．

定理8は[FOOO]の主定理より，$c_1(M) = 0$とマスロフ指数が0という余分な仮定が付いている．この仮定があると，Floerホモロジーは整数で次数付けられるという利点があり，ミラー対称性への応用にはこの仮定のもとで議論するのが自然である．$\mathcal{M}(L) = \mathcal{M}(C(L), \mathfrak{m}_k)$とおく，すなわち方程式(36)の解のゲージ同値類全体である．標準モデルに$(C(L), \mathfrak{m}_k)$を置き換えると，$C(L) = H(L; \mathbb{C}) \otimes \Lambda$である．したがって，(36)あるいは倉西写像は

$$\mathrm{Kura} : H^1(L; \mathbb{C}) \otimes \Lambda_+ \to H^2(L; \mathbb{C}) \otimes \Lambda_+$$

とかける．言い換えると

$$\mathrm{Kura} = \sum_{i,k} q^{\lambda_i} \mathrm{Kura}_{i,k}$$

[46] $R \subset \Lambda$でないとこれは成立しない．われわれの場合は$R = \mathbb{C}$なので成り立っている．

$$\mathrm{Kura}_{i,k}: H^1(L;\mathbb{C})^{k\otimes} \to H^2(L;\mathbb{C})$$

と書け，$\mathrm{Kura}_{i,k}$ は対称 $\mathbb{C}$ 多重線形 k 形式である．(L が有理的ならば λ_i は有理数で Kura は q の一種の形式的 Puisequx 級数である．) $\mathcal{M}(L)$ は Kura の零点集合である．

$\mathcal{M}(L)$ が空でなければ，$M^\dagger$ 上に解析的連接層 $\mathfrak{E}$ があり，そこから作られる DGA $(\Omega^{0,*}(End(\mathfrak{E})), \overline{\partial}, \wedge)$ が $(C(L), \mathfrak{m}_k)$ とホモトピー同値 (A_∞ 代数として) になるというのが，ホモロジー的ミラー対称性のひとつの形であるが，$(C(L), \mathfrak{m}_k)$ はフィルター付き A_∞ 代数であるから係数が合わない．これを解決する議論は §3 で説明した．多少オーバーラップするが繰り返すと以下の通り．まず，L[47]は有理ラグランジュ部分多様体とする．すると，族 $\mathfrak{M}^\dagger_m$ 上の解析的連接層，正確にいうと，$\mathbb{D}\mathfrak{M}^\dagger$ の対称 $\mathfrak{E}$ が存在する．ここで，4-1 のまねをすると，$\mathfrak{E}$ から，$\Lambda^{\mathbb{Q}}_{nov,0}$ 上の DGA(複素多様体側では $\mathfrak{m}_0 = 0$ になっている) が定まる．これも $(\Omega^{0,*}(End(\mathfrak{E})), \overline{\partial}, \wedge)$ とかく.（4-1 のまねをどうやるのかは省略する．代数幾何のプロには自明と思われる[48].）

予想 7. $(\Omega^{0,*}(End(\mathfrak{E})), \overline{\partial}, \wedge)$ は $(C(L), \mathfrak{m}_k)$ とフィルター付き A_∞ 代数としてホモトピー同値．さらに，ホモトピー同値は $\hat{\mathbb{Z}}$ 作用[49]をたもつ．

予想 7 は予想 6 の一部である．

4-3 巡回対象性と相対 Gromov-Witten ポテンシャル

4-2 の構成は量子カップ積 (+量子 Massey 積+ ...) の相対化 (ラグランジュ部分多様体がある場合への) ということができる．次に Gromov-Witten ポテンシャルにあたるものを考えたい．そのために A_∞ 代数の巡回対称性について論じる[50]．フィルター付きの場合も同様で，そちらを使うからフィルター付き A_∞ 代数に対して論じる．$(C, \mathfrak{m}_k)$ をフィルター付き A_∞ 代数とする．

定義 9. $(C, \mathfrak{m}_k)$ が巡回対象性を持つとは，非退化内積

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C^k \otimes_\Lambda C^{n-k} \to \Lambda$$

があって，

$$\langle \mathfrak{m}_k(x_1, \cdots, x_k), x_0 \rangle = (-1)^{\deg' x_0 (\deg' x_1 + \cdots + \deg' x_k)} \langle \mathfrak{m}_k(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}), x_k \rangle$$

[47] L 上の平坦 $U(1)$ 束を含めてもいいがあまり話は変わらないので省略する．

[48]が筆者はそうではないので，考えていると締め切りを過ぎそうなので．

[49] $\hat{\mathbb{Z}}$ 作用が両方のフィルター付き A_∞ 代数に対して構成できる．

[50]このあたりの議論は [ASZK] あたりに起源があるように思うが誰が始めたかよく知らない．

が成り立つことを指す．$(\deg' = \deg + 1.)$

n は L の次元に対応する数で，ここでは3とおもってよい．又,内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は

$$\langle x, y \rangle = (-1)^{\deg x \deg y} \langle y, x \rangle$$

を満たすとする．ここで取り上げる例では，内積はおおむねポアンカレ双対である．

以後符号は再び省略する．また，$n = 3$ とする．巡回対象性をもつ A_∞ 代数 $(C, \mathfrak{m}_k, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を考える．

定義 10. 超ポテンシャル (super potential)，$\Psi : C^1 \otimes \Lambda_+ \to \Lambda_+$ を次の式で定義する．

$$\Psi(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \langle \mathfrak{m}_k(b, \cdots, b), b \rangle.$$

最初の3つの項を書くと

$$\Psi(b) = \langle \mathfrak{m}_0(1), b \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathfrak{m}_1(b), b \rangle + \frac{1}{3} \langle \mathfrak{m}_2(b, b), b \rangle + \cdots$$

である．巡回対称性の意義は次の補題に現われる．

補題 4. b が Maurer-Cartan 方程式を満たすことと，b が超ポテンシャルの臨界点であることは同値である．

証明: 巡回対称性により

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{k+1} \langle \mathfrak{m}_k(b_t, \cdots, b_t), b_t \rangle \Big|_{t=0} = \langle \mathfrak{m}_k(b_0, \cdots, b_0), \frac{db_t}{dt}(0) \rangle$$

である．よって，

$$\frac{d}{dt} \Psi(b) \Big|_{t=0} = \left\langle \sum \mathfrak{m}_k(b_0, \cdots, b_0), \frac{db_t}{dt}(0) \right\rangle$$

である．補題はこれから明らか．

巡回対称性をもつ A_∞ 代数とその超ポテンシャルの例を挙げる．

まず X を実3次元多様体とし，その上のランク m の平坦ベクトル束 $E \to X$ を考える．$End(E)$ 係数微分形式全体 $\Omega^*(End(E))$ を考える．E の平坦接続は微分を決め，また，$End(E)$ 成分の合成と微分形式の積を

使って，積 $\wedge$ がきまる．したがって，$(\Omega^*(End(E)), d, \wedge)$ は DGA になる．（4-1 節の $(\Omega^{0,*}(End(\mathfrak{E})), \overline{\partial}, \wedge)$ はその複素版である．）

$$\langle u, v\rangle = \int_M \mathrm{Tr}(u \wedge v)$$

とすることで，巡回対称性が確かめられる．この場合の超ポテンシャルは

$$\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Tr}(db \wedge b) + \frac{1}{3}\int_M \mathrm{Tr}(b \wedge b \wedge b)$$

で，これは Chern-Simons 汎関数である．よく知られているように，Chern-Simons 汎関数の臨界点は平坦接続で，すなわち，Maurer-Cartan 方程式

$$db + b \wedge b = 0$$

の解である．

次に，4-1 節で定義した DGA，$(\Omega^{0,*}(End(\mathfrak{E})), \overline{\partial}, \wedge)$ を考える．これも，

$$\langle u, v\rangle = \int_{M^\dagger} \mathrm{Tr}(u \wedge v) \wedge \Omega$$

とすることで，巡回対称性をもつ．(Ω は Calabi-Yau 多様体 $M^\dagger$ 上の正則 $(3,0)$ 形式であった．）超ポテンシャルは正則 Chern-Simons 汎関数

$$\frac{1}{2}\int_{M^\dagger} \mathrm{Tr}(db \wedge b) \wedge \Omega + \frac{1}{3}\int_{M^\dagger} \mathrm{Tr}(b \wedge b \wedge b) \wedge \Omega$$

で，その臨界点は $\mathfrak{E}$ 上の正則ベクトル束の構造に対応する．

さて，定理 8 のフィルター付き A_∞ 代数の巡回対称性を論じたい．幾何学的には巡回対称性が明らかに存在するであることを説明するため，$\mathfrak{m}_k$ の定義について少し述べなければならない．

まず，複体 $C(L)$ は可算個[51]の L の特異サイクルをとり，それが生成する特異複体の部分複体とする．$\mathfrak{m}_k$ はおおよそ次のように定義される．$\beta \in \pi_2(M, L)$ とする．モジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}_{k+1}(M, L; \beta)$ を次の条件を満たす，$(\varphi, \vec{p})$ 全体とする[52]．

(1)　$\varphi : (D^2, \partial D^2) \to (M, L)$ は擬正則．

[51]可算個にするのは Bair のカテゴリー定理を使うためである．

[52]モジュライ空間が片っ端から $\mathcal{M}$ なので紛らわしいが，この $\mathcal{M}$ は Maurer-Cartan スタックではない．このモジュライ空間を使って $\mathfrak{m}$ を定義し，それを使って，Maurer-Cartan スタックを定義するのだった．

(2)　$\vec{p} = (p_0, p_1, \cdots, p_k)$ は ∂D 上の $k+1$ 個の点で反時計回りの順番になっている．
(3)　φ のホモトピー類は β.

$PSL(2;\mathbb{R})$ すなわち D^2 の双正則写像全体が $\widetilde{\mathcal{M}}_{k+1}(M, L; \beta)$ に作用する．その商空間を $\mathcal{M}_{k+1}(M, L; \beta)$ とする．

さて，$P_1, \cdots, P_k$ を L のサイクルとしたとき，

$$\mathfrak{m}_k(P_1, \cdots, P_k) = \sum_\beta q^{\beta\cap\omega} ev_0(\mathcal{M}_{k+1}(M, L; \beta) \times (P_1 \times \cdots \times P_k)) \quad (37)$$

とおく．ここで

$$ev = (ev_0, \cdots, ev_k) : \mathcal{M}_{k+1}(M, L; \beta) \to L^k$$

を

$$ev(\varphi, \vec{p}) = (\varphi(p_0), \cdots, \varphi(p_k)$$

とし，定義中の $\times$ は $(ev_1, \cdots, ev_k)$ を使ってとったファイバー積である．

これで，$\mathfrak{m}_k$ のあらい定義ができた．

巡回対称性の議論にもどる．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ をポアンカレ双対とする．すると，(37) から容易に分かるように，

$$\langle\mathfrak{m}_k(P_1, \cdots, P_k), P_0\rangle = \sum_\beta q^{\beta\cap\omega} \pm \mathcal{M}_{k+1}(M, L; \beta) \times (P_0 \times P_1 \times \cdots \times P_k) \quad (38)$$

である．(ここでも $\times$ は $(ev_0, ev_1, \cdots, ev_k)$ を使ってとったファイバー積である．) 定義を見ると $\mathcal{M}_{k+1}(M, L; \beta)$ は名前つきの点 $(p_0, \cdots, p_k)$ の巡回置換に関して対称だから，(38) は巡回対称性を持つように思える．これが，幾何学的には巡回対称性は明らかといった理由である．

しかし，実は巡回対象性の証明は大変厄介で，[FOOO] の 2000 年版には書かれていない．問題点は横断正則性である．たとえば，$\beta = 0$ の場合を考えてみると，これは，特異複体 (singular chain complex) の中に，ポアンカレ双対と境界作用素とカップ積をすべてチェインレベルで実現する部分複体を作れ，という問題になる．もちろん，特異複体ではポアンカレ双対はチェインレベルでは実現されない．これは対角集合の横断正則性の問題で微分位相幾何学の根底問題であると同時に，場の量子論の発散の問題にかかわる．なお，ド・ラームコホモロジーを使えば，$\beta = 0$ にかかわる部分については，巡回正則性を持つ DGA（すなわちド・ラー

ム複体）が構成できる．しかし，$\mathcal{M}_{k+1}(M,L;\beta)$ があらわすのはサイクルであるいは特異な微分形式（カレント）であって，ドラーム理論とは相性が悪い．すなわち，ド・ラーム理論を使えば問題が解決するわけではない．

[FOOO] では小野薫氏と筆者が作ったモジュライ空間における横断正則性の一般論 [FO] を用いたが，特異複体を用いて，すべての対称性を保ったまま，正しい摂動を見出すことはできなかった[53]．それで，定理 8 の A_∞ 代数の巡回対称性の証明は 2000 年版の [FOOO] にはない．しかし，最近摂動の新しいやり方を考えることにより，ドラーム複体を用いて，巡回対称性を満たす A_∞ 代数が構成できることが分かったので，次に「定理」として述べておく[54]．M を $c_1=0$ である実 6 次元シンプレクティック多様体，L をマスロフ指数が 0 である，M のラグランジュ部分多様体とする[55]．L は (相対) スピン構造を持つとする．$(\Omega(L),d,\wedge)$ を L のドラーム複体する．$C(L)=\Omega(L)\otimes\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,0}$ とする[56]．$\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,+}$ を $\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,0}$ の極大イデアルとする.（つまり，$\sum a_i q^{\lambda_i}\in\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,0}$ で $\lambda_i>0$ なるもの全体である．

「定理 9.」 $C(L)$ 上の巡回対称性を持つフィルター付き A_∞ 構造 $\mathfrak{m}_k$ で，$(C(L),\mathfrak{m}_k)\equiv(\Omega(L),d,\wedge)\mod\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,+}$ なるものがある．$(C(L),\mathfrak{m}_k)$ は定理 8 の A_∞ 代数にホモトピー同値である．

これを用いれば，超ポテンシャルが $H^1(L;\mathbb{C})\otimes\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,+}$ 上に次のようにして構成できる．まず，$(C(L),\mathfrak{m}_k)$ の標準モデルを作る．標準モデルの構成のファイアマン図を使うやり方（[Fu3] をみよ）をみると，もともとの A_∞ 代数が巡回対称性をもてば，標準モデルも巡回対称性を持つことが分かる．標準モデルは，ベクトル空間として $H^*(L;\mathbb{C})\otimes\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,+}$ であったから，この上の超ポテンシャルは

$$\Psi: H^1(L;\mathbb{C})\otimes\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,+}\to\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,+}$$

なる写像である．$\Psi(b)$ は標語的には次のように書ける．b を $\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,+}$ 係数の調和微分 1 形式とすると

$$\Psi(b)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\beta}q^{\beta\cap\omega}\int_{\mathcal{M}_k(M,L;\beta)}ev^*(b\wedge\cdots\wedge b) \tag{39}$$

[53] A_∞ 構造の構成はチェインレベルで議論を行わなければならず，それで横断正則性の議論は Gromov-Witten 不変量にかかわるものなどより，より困難である．

[54] まだ証明を書いていないので括弧をつけておく．

[55] 巡回対称性の議論はこれらの仮定がなくても一般のシンプレクティック多様体とラグランジュ部分多様体で成立する．

[56] L が有理的なら $\Lambda^{\mathbb{Q}}_{nov,0}$

ここで，被積分関数の $b\wedge\cdots\wedge b$ は L^k の各成分に b を置いて，積をとったものである．

(39) には $k=0$ の項がない．$k=0$ の項はおおむね

$$\sum_\beta q^{\beta\cap\omega}\sharp(\mathcal{M}_0(M,L;\beta)) \tag{40}$$

すなわち，L を境界にもつ擬正則円盤を，重み $q^{\beta\cap\omega}$ で数えたものであろう．(40) は Gromov-Witten ポテンシャルの定義式 (3) にかなり近い．したがって (40) を相対 Gromov-Witten ポテンシャルとしたいのだが，それは well defined にならない．$\mathcal{M}_0(M,L;\beta)$ の仮想次元は 0 だが，数を数えられるように摂動を加えると，(40) は摂動のとり方によってしまう．(39) と (40) の和をとれば正しい相対 Gromov-Witten ポテンシャルなるだろうと筆者に教えてくれたのは Seidel である[57]．それで，その不変量を相対と Super と Seidel の S を使って，SGW 不変量と呼ぶことにしたい[58]．すなわち，

「定義 11.」

$$\begin{aligned}&SGW((M,L);b)\\&=\sum_\beta q^{\beta\cap\omega}\sharp(\mathcal{M}_0(M,L;\beta))+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_\beta q^{\beta\cap\omega}\int_{\mathcal{M}_k(M,L;\beta)}ev^*(b\wedge\ \ldots\ \wedge b)\end{aligned}$$

定義 11 の中に書いてある式は，そのままでは意味を成さない．すなわち，$\mathcal{M}_k(M,L;\beta)$, $k=0,\cdots$, たちを，巡回対称性を保ち，お互いの整合性を保ちながら摂動しなければならない．それは「定理 9」と同様にしてできるのだが，まだ証明を書いていないので，括弧をつけておく．$SGW((M,L);b)$ は次の意味で不変量である．$\Phi: M\to M'$ がシンプレクティック同相とする．L の Φ による像が L' であるとする．このとき，$\Phi_*:\widehat{\mathcal{M}}(L)\to\widehat{\mathcal{M}}(L')$ なる写像が導かれる[59]．

「定理 10」．$b\in\widehat{\mathcal{M}}(L)$ のとき，$SGW((M,L);b)$ は概複素構造や摂動のとり方によらない．また，$\varphi: M\to M'$ がシンプレクティック同相ならば，

$$SGW((M,L);b)=SGW((M',L');\Phi_*(b)).$$

[57] private communication．それには巡回対称性が必要であり，それは自分には今のところ分からない，ともいっていた (2002 年春)．

[58] S が relative の略でもあると分かってくれるのは日本人だけだろうが．

[59] $\widehat{\mathcal{M}}(L)$ は定理 9 のフィルター付き A_∞ 代数から決まる Maurer-Cartan スタックつまり超ポテンシャル (39) の臨界点の集合である．

「定理 10」の証明の方針は時間があれば講演中に述べる．

SWG の定義と超ポテンシャルの定義の差は b によらない項である．したがって，補題 4 より，b が SWG の臨界点であれば Maurer-Cartan 方程式を満たす．さらに，臨界点の集合すなわち Maurer-Cartan スタック上で局所的に定数である．すなわち，$SGW((M,L);b)$ は $b \in \mathcal{M}(L)$ とき，b を含む $\mathcal{M}(L)$ の連結成分のみによる．だから，おおよそ $SGW((M,L);b)$ は (M,L) の不変量といってよいであろう[60]．

さて，これで次の予想が述べられる．

予想 8. $SGW((M,L);b)$ はそのミラーに当たる正則ベクトル束の正則 Chern-Simons 不変量に一致する．

この予想は，たとえば予想 6,7 に比べると，予想としても数学としての完成度が低い．

さて，最後により先すなわち種数の高い境界付きリーマン面からの，写像を数える話を少しする．これも同様な議論でできる気がしてきているが,「定理 9」,「定理 10」より証明の細部を詰めている度合いがさらに小さいので，予想としておく．Σ_g を種数 g のリーマン面から円盤を除いた境界付きリーマン面とする．$\mathcal{M}_{g,k}(M,L;\beta)$ を $\varphi : (\Sigma, \partial\Sigma) \to (M,L)$ なる擬正則写像（Σ_g の複素構造も動かす）と，$(p_1,\cdots,p_k) \in \partial\Sigma^k$（反時計回りに並んでいる）の組のモジュライ空間とする．これを使って $SGW((M,L);b)$ のような量を定義すると，不変量になるかというと，そうはいかず，さらに補正項が必要である．補正項の形はここでは長くなるので省略し，次の結論だけを書いておく．M を $c_1 = 0$ なる実 6 次元シンプレクティック多様体．$L \subset M$ をラグランジュ部分多様体とし，$H^*(L;\mathbb{Q}) \cong H^*(S^3;\mathbb{Q})$ とする．(おそらくさらに L に枠 (framing) を決めておく必要がある．)

予想 9． $b \in \mathcal{M}_{g,k}(M,L;\beta)$ に対して，

$$SWG_g(M,L;b) \in \Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,0}$$

が定まり，概複素構造や摂動によらない．$SWG_g(M,L;b)$ は $\Lambda^{\mathbb{R}}_{nov,+}$ を法にして，M の自明束の種数 g の Chern-Simons 摂動理論[61]の不変量に等しい．また，

$$SGW_g((M,L);b) = SGW_g((M',L');\Phi_*(b)).$$

---

[60] $\mathcal{M}(L)$ が不連結であると，ミラー側では 2 種類の解析的連接層（の圏の導来圏の対象）が対応すると思われる．

[61] [AxS]

更なる一般化として，複数のラグランジュ部分多様体をとることが考えられる．たとえば，$L_1 \cap L_2 \cong S^1$ の場合で L_1 が球面の場合には $L_1 \cap L_2 \subset L_1$ なる結び目の不変量 (Vassiliev 不変量) が Chern-Simons 摂動理論の不変量の代わりに現われ，その量子化が擬正則曲線を考えることで得られることが予想される[62]．そのあたりももう少しがんばれば手が届きそうなのだが，まだ数学としてはできていない．SGW, SGW_g にあたる不変量は，数学的な定義ができる前から，物理学者らによって，不動点公式を用いるなどして，精力的に計算されているようである．（数学者もかかわっているようだが．）ここで述べた形で定義を正当化した後，それらの計算が正当化するのが，数学として理論を組み立てていく順序となるだろう．

参考文献

[ASZK] M. Alexandrov, A. Schwarz, O. Zaboronsky, M. Kontsevich, *The geometry of the master equation and topological quantum field theory.* Internat. J. Modern Phys. A 12 (1997), no. 7, 1405–1429.

[Ar] Artin, M, *On the solutions of analytic equations.* Invent. Math. **5** (1968) 277–291.

[As] P.S. Aspinwall, *Some Navigation Rules for D-Brane Monodromy.* J.Math.Phys. **42** (2001) 5534-5552, hep-th/0102198.

[AxS] S. Axelrod, I.M.Singer, *Chern-Simons perturbation theory. II.* J. Differential Geom. **39** (1994), 173–213.

[BD] P. Braam, S.Donaldson, *Floer's work on instanton homology, knots and surgery. The Floer memorial volume*, 195–256, Progr. Math., 133, Birkhauser, Basel, 1995.

[COGP] P.Candelas, X. de la Ossa, P.Green and L.Parks, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory.* Nucl. Phys. **B359** (1991), 21–74.

[Fu1] K.Fukaya, *Mirror symmetry of Abelian varieties and multi theta function.* J. Algebraic Geom. **11** (2002), 393-512.

[62] Large N Duality 云々．[Gra] とか [VZ] に数学者にも読めるであろう解説がある．原論文は [OV] あたりだと思う．

[Fu2] K.Fukaya, *Floer homology and Mirror symmetry II.* in "Minimal surfaces, Geometric Analysis and Symplectic Geometry", Advanced Studies in Pure Math. **34**, (Kenji Fukaya, Seiki Nishikawa and Joel Spruck ed.) Math. Soc. of Japan, (2002), 31-127.

[Fu3] K.Fukaya, *Deformation theory, homological algebra and mirror symmetry.* in "Geometry and Physics of Branes", (U.Bruzzo, V.Gorinu, and U.Moschelli ed), Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia (2002) 121-210.

[Fu4] K.Fukaya, *Floer homology for families - a progress report.* Integrable systems, topology, and physics (Tokyo, 2000), 33–68, Contemp. Math., **309**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002

[Fu5] K.Fukaya, *Galois symmetry on Floer cohomology.* Turkish J. Math. **27** (2003), 11–32.

[Fu6] K.Fukaya, *Asymptotic Analysis, Multivalued Morse theory, and Mirror symmetry.* to appear in D.Sullivan Memorial Volume.

[Fu7] 深谷賢治, シンプレクティック幾何学, 岩波講座現代数学の展開 8, 1999 年.

[FOOO] K.Fukaya, Y.G.Oh, H.Ohta and K.Ono , *Lagrangian intersection Floer theory - anomaly and obstruction.* Preprint, http://www.ksum.kyoto-u.ac.jp/ fukaya/fukaya.html, (2000).

[FO] K.Fukaya and K.Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant.* Topology **38** (1999), 933-1048.

[Fl1] A.Floer, *Morse theory for Lagrangian intersectoin.* J.Diff.Geom. **28** (1988), 513-547.

[Fl2] A.Floer, *Instanton homology and Dehn surgery.* The Floer memorial volume, 77–97, Progr. Math., 133, Birkhauser, Basel, 1995

[GoM] W.Goldman and J. Milson, *The deformation theory of representation of fundamental groups in compact Kähler manifolds.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **67** (1988) 43–96.

[Gra] A. Grassi, M. Rossi, *Large N dualities and transitions in geometry.* Geometry and physics of branes (Como, 2001), 210–278, Ser. High Energy Phys. Cosmol. Gravit., IOP, Bristol, 2003.

[Gr] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds.* Invent. Math. **82** (1985) 307–347.

[GeM] S. Gelfand, Y. Manin, *Methods of homological algebra.* Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Ka] T.V. Kadeishivili, *The algebraic structure in homology of an $A(\infty)$ algebra.* Soobshch. Acad. Nauk. Gruzin. SSR. **108** (2) 249 – 252.

[KO] A.Kapustin, D.Orlov *Lectures on Mirror Symmetry, Derived Categories, and D-branes.* math.AG/0308173.

[Ko] M.Kontsevitch, *Homological algebra of Mirror symmetry.* International Congress of Math. Zürich, Birkhauser (1995).

[KS] M.Kontsevitch and Y.Soibeleman, *Homological mirror symmetry and torus fibration.* in "Symplectic geometry and Mirror Symmetry" (K.Fukaya, Y.G.Oh and G.Tian ed.) World Sci. Press, Singapore (2001), 203-265.

[LTY] B.Lian, A.Todorov and S.T.Yau, *Maximal Unipotent Monodromy for Complete Intersection CY Manifolds.* Preprint, math.AG/0008061.

[Ne] A.Néron, *Moèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **21** (1964) 128pp.

[No] S.Novikov, *Multivalued functions and functional - an analogue of Morse theory.* Sov. Math. Dokl. **26** (1981) 222-225.

[Ni] T.Nishinou, *Lagrangian submanifold associated with a degenerating family of stable bundles on T^4.* Thesis, Kyoto Univ. 2003.

[Oh] Y.G.Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks I and II.* Comm. Pure and Appl. Math. **46** (1993) 949-994 and 995-1012.

[Ot] H. Ohta, *Obstruction to and deformation of Lagrangian intersection Floer cohomology.* Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), 281–309, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001.

[OV] H. Ooguri, C. Vafa, *Knot invariants and topological strings.* Nuclear Phys. B 577 (2000), no. 3, 419–438.

[PZ] A.Polishchuk and E.Zaslov, *Categorical mirror symmetry: the elliptic curve* Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 443-470.

[Se1] P.Seidel, *A long exact sequence for symplectic Floer cohomology.* Topology **42** (2003), 1003–1063

[Se2] P.Seidel, *Vanishing cycles and mutation.* European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000), 65–85, Progr. Math., 202, Birkhauser, Basel, 2001.

[Se3] P.Seidel, *More about vanishing cycles and mutation.* Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), 429–465, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001.

[Se4] P.Seidel, *Fukaya categories and deformations.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 351–360, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[SK] P.Seidel and M.Khovanov, *Quivers, Floer cohomology, and braid group actions.* J. Amer. Math. Soc. **15** (2002) 203-271.

[ST] P.Seidel and R.Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves.* Duke Math. J. **108** (2001) 37-108.

[SYZ] A.Stromingerm S.T.Yas and E.Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality.* Nucl. Phys. **B476** (1996), 243-259.

[VZ] C.Vafa, E.Zaslow ed., *Mirror symmetry.* Clay Mathematics Monographs **1**, Amer. Math. Soc. 2003.

[Yau] S.T. Yau ed., *Mirror symmetry I,II,* . . . . AMS/IP Stud. Adv. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI.