2003.10

スペシャル幾何学
Calabi-Yau, hyperKähler, G_2, Spin (7) 構造

Ryushi Goto

Department of Mathematics,
Graduate School of Science,
Osaka University,
Toyonaka, Osaka, 560, Japan

§0 スペシャル幾何学
(calabi-Yau, hyperKähler, G_2, Spin (7))
スペシャルホロノミー群を持つリッチ平坦リーマン多様体

スペシャルホロノミー群を持つリッチ平坦リーマン多様体は微分幾何、複素幾何、代数幾何そして数理物理など様々な分野に深く関連しており、多くの興味深い結果が得られ, また最近、新しい例が続々と発見されている。既約かつ non-symmetric な単連結リーマン多様体はそのホロノミー群により分類することができる ([Be]) この分類によれば、スペシャルホロノミー群を持つリッチ平坦リーマン多様体は、四つのクラスに分類され、それぞれの制限ホロノミー群として、次のリー群があらわれる：

$$\mathrm{SU}(n), \quad \mathrm{Sp}(m), \quad G_2, \quad \mathrm{Spin}(7)$$

§0-1 Calabi-Yau 多様体. $\mathrm{SU}(n)$ をホロノミー群とする $2n$ 次元リーマン多様体を *Calabi-Yau* 多様体という。Calabi-Yau 多様体 X はケーラー多様体であり、リッチ曲率が零となる Kähler-Einstein 多様体である。リッチ曲率が零となるコンパクトケーラー多様体 (X, g) の有限非分岐被覆はケーラー多様体の直積 $T \times X_1 \times \cdots \times X_k$ と同型である。ここで、T は平坦なケーラートーラスで、各 X_i は単連結かつ既約なリーマン多様体で Calabi-Yau 多様体かハイパーケーラー多様体か、どちらかとなる $(i = 1, \cdots, k)$。Calabi-Yau 多様体 X の標準束 K_X は自明となり、零点を持たない正則 n 形式 Ω が存在する。ケーラー形式 ω と複素 n 形式 Ω は次の関係式（モンジュ· アンペール方程式):

$$\Omega \wedge \overline{\Omega} = (\sqrt{-1})^n \overbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}^{n}$$

をみたす。逆に標準束 K_X が自明なケーラー多様体上の正則 n 形式 Ω とケーラー形式 ω がモンジュ· アンペール方程式をみたせば、Ω と ω はともに Levi-Civita 接続 ∇ に関

して平行な微分形式となり、リッチ曲率は零で、X のホロノミー群は $\mathrm{SU}(n)$ の部分群となる。リッチ曲率が零となるコンパクトケーラー多様体 X 上の $(p,0)$ 型閉微分形式は平行になる。これから、実 $2n$ 次元 (複素 n 次元)Calabi-Yau 多様体 X の Hodge 数は $h^{n,0}=1, h^{p,0}=0(p\neq 0,n)$ をみたす。$n=2$ なら、$K3$ 曲面がコンパクトな Calabi-Yau 多様体である。$n\geq 3$ のとき、$\mathrm{H}^2(X)=\mathrm{H}^{1,1}(X)$ であり、X のケーラー錐は $\mathrm{H}^2(X)$ のなかの開集合となり、X は複素射影空間に埋め込まれる。 X をコンパクトなケーラー多様体で、その標準束 K_X が自明になっているものとし、Ω を零点を持たない正則 n 形式とする。このとき、Calabi 予想の Yau による解決 ([Y]) により、X の各ケーラー類の中にモンジュ· アンペール方程式をみたすケーラー形式 ω がただ一つ存在する。この存在定理により、コンパクトな Calabi-Yau 多様体の様々な例が構成される。コンパクト Calabi-Yau 多様体の倉西空間 (複素構造の変形空間) は滑らかになることが知られている。([Bo],[Ti]) 更に Calabi-Yau 多様体 X のケーラー型式を込めた変形は以下に説明するように、微分形式を使い記述できる。X を $2n$ 次元の実多様体とし、$T^{\mathbb{C}}X$ を X の接束 TX の複素化とする。Ω を X 上の複素 n 形式とし、$d\Omega=0$ とする。$\mathrm{Ker}\Omega$ を内部積をもちいて、$\mathrm{Ker}\Omega=\{\, v\in T^{\mathbb{C}}X \mid i_v\Omega=0\,\}$ と定める。$\mathrm{Ker}\Omega$ がランク n の複素部分束で、$T^{\mathbb{C}}X$ の分解:

$$T^{\mathbb{C}}X=\mathrm{Ker}\Omega\oplus\overline{\mathrm{Ker}\Omega} \tag{1}$$

を与えるとき、閉形式 Ω を X 上の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造という。ここで、$\overline{\mathrm{Ker}\Omega}$ は複素共役とする。$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造 Ω は分解 (1) から、X 上の概複素構造 I_Ω を定め、Ω が閉形式のため、I_Ω は積分可能で、(X, I_Ω) は標準束 K_X が自明な複素多様体となる。(このとき、Ω は零点を持たない正則 n 形式となる。) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造 Ω と X 上の symplectic 形式 ω が次の三つの条件をみたすとき、複素 n 形式 Ω と 2 形式 ω の対 (Ω,ω) を Calabi-Yau 構造という;

(i) $\Omega\wedge\omega=0$

(ii) $\Omega\wedge\overline{\Omega}=(\sqrt{-1})^n\omega^n$ が成立

(iii) $g(u,v)=\omega(I_\Omega u,v)$ がリーマン計量 g を定める、
$(u,v\in TX)$

このとき、ω は複素構造 I_Ω に関して、ケーラー形式となり、リーマン計量 g のホロノミー群は $\mathrm{SU}(n)$ の部分群となる。Calabi-Yau 構造全体を $\widetilde{\mathcal{M}}_{CY}(X)$ とする。$\widetilde{\mathcal{M}}_{CY}(X)$ には pull back(引き戻し) により、微分同相写像全体のつくる群 $\mathrm{Diff}(X)$ が作用している。商空間 $\mathcal{M}_{CY}(X)=\widetilde{\mathcal{M}}_{CY}(X)/\mathrm{Diff}_0(X)$ を X 上の Calabi-Yau 構造のモジュライ空間という。ここで、$\mathrm{Diff}_0(X)$ は $\mathrm{Diff}(X)$ の恒等写像を含む連結成分とする。このとき、モジュライ空間 $\mathcal{M}_{CY}(X)$ は有限次元の多様体となる。$\mathrm{Diff}_0(X)$ は de Rham コホモロジー群に自明に作用するので、Ω と ω のコホモロジー類 をそれぞれとることにより、モジュライ空間 $\mathcal{M}_{CY}(X)$ からの自然な写像 $P\colon \mathcal{M}_{CY}(X)\to\mathrm{H}^n(X,\mathbb{C})\oplus\mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$ が得られる。P を Calabi-Yau 構造の周期写像という。写像 P は局所的に単射となる。更に

$K3$ 曲面にたいして、写像 P は単射となる (大域トレリ型定理)。Calabi-Yau 多様体の定義は文献、研究分野により異なっており、注意が必要。以下の (1),(2) を Calabi-Yau 多様体という場合がある。(1) ホロノミー群が $\mathrm{SU}(n)$ の部分群となる $2n$ 次元リーマン多様体。(2) 単連結で第一チャーン類が零となる複素多様体。(単連結の代わりに第一ベッチ数が零とすることもある。)

§**0-2** ハイパーケーラー多様体**.** $4m$ 次元のリーマン多様体 (X, g) のホロノミー群が $\mathrm{Sp}(m)$ となるとき、これをハイパーケーラー多様体 hyperKähler manifold という。ハイパーケーラー多様体はリッチ曲率が零の Einstein 多様体であり、コンパクトならば単連結となる。ハイパーケーラー多様体 (X, g) には三つの概複素構造 I, J, K が存在し、四元数の関係式 $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ をみたす。リーマン計量 g は I, J, K それぞれについて、エルミート計量で、Levi-Civita 接続 ∇ に関して、$\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$ となる。ハイパーケーラー多様体は I, J, K それぞれに対応し、三つのケーラー型式 $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ をもつ。複素 2 型式 $\omega_{\mathbb{C}} = \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$ は複素構造 I について、正則な symplectic 型式 holomorphic symplectic form となる。$K3$ 曲面や、$K3$ 曲面の Hilbert scheme などがコンパクトなハイパーケーラー多様体である ([B],[F])。複素構造 I についてコンパクトなハイパーケーラー多様体の Hodge 数は $h^{2p,0} = 1, h^{2p-1,0} = 0, (p = 1, \cdots m)$ をみたす。なお、ホロノミー群が $\mathrm{Sp}(m)$ の部分群となる $4m$ 次元リーマン多様体をハイパーケーラー多様体という場合もある。

§**0-3** G_2 多様体**.** 7 次元リーマン多様体 (X, g) のホロノミー群が例外型リー群 G_2 となるとき、(X, g) を G_2 多様体 G_2 manifold という。G_2 多様体はリッチ曲率が零となる多様体で、コンパクトならば基本群が有限群となる。以下、$\mathbb{O}$ を Cayley 数全体、$\mathrm{Im}\mathbb{O}$ を $\mathbb{O}$ の虚数部分とする。例外型リー群 G_2 とは 14 次元のリー群で Cayley 数全体 $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{O}) = \{\, g \in GL_8(\mathbb{R}) \,|\, g(xy) = g(x)g(y) \,\}$ である。$g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ は $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の向き、内積を保つ同型写像となるため、G_2 は $\mathrm{SO}(\mathrm{Im}\mathbb{O}) \cong \mathrm{SO}(7)$ の部分リー群となる。V を $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ がなす 7 次元ベクトル空間とする。x, y, z を V の元とし、Cayley 数の積と内積 $\langle\, ,\, \rangle$ により、V 上の 3 形式 ϕ_0 を $\phi_0(x, y, z) = \langle x, yz \rangle$ と定義し、 更に V 上の Hodge star 作用素 $*$ により、4 形式 $\psi_0 = *\phi_0$ を定める。V^* を V の双対空間とし、ρ を $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$ の $\wedge^3 V^* \oplus \wedge^4 V^*$ への線形表現とする。(ϕ_0, ψ_0) を通る $\mathrm{GL}(V)$ 軌道を $\mathcal{A}_{G_2}(V)$ とする。このイソトロピー群は G_2 であり、軌道 $\mathcal{A}_{G_2}(V)$ は等質空間 $\mathrm{GL}_7(\mathbb{R})/G_2$ となる。軌道 $\mathcal{A}_{G_2}(V)$ に属する 3 形式と 4 形式の対 (ϕ_V, ψ_V) を V 上の G_2 構造といい、ϕ_V を associative 3 形式、ψ を coassociative 4 形式という。V^* の基底 $\{x_1, x_2, \cdots, x_7\}$ を適当にとれば、associative3 形式 ϕ_V は具体的に

(G-1) $$\phi_V = x_{123} - x_{145} - x_{156} - x_{246} - x_{275} - x_{347} - x_{356}$$

と表示される。ここで、$x_{\alpha\beta\gamma} = x_\alpha \wedge x_\beta \wedge x_\gamma$ とする。X を 7 次元多様体する。X 上の閉 3 形式と閉 4 形式の対 (ϕ, ψ) が、各接ベクトル空間 $T_x X$ 上 associative3 形式と coassociative 4 形式を与えるとき、対 (ϕ, ψ) を X 上の G_2 構造という。これは各接束 $T_x X$ の基底を適当にとれば、ϕ は (G-1) の表示を持つことを意味する。ϕ は $T_x X$ 上非退化な正値対称 2 次型式を定めるため、X 上のリーマン計量 g_ϕ が定まる。g_ϕ の Levi-civita 接続 ∇ にたいして、$\nabla\phi = 0, \nabla\psi = 0$ が成立し、ϕ のイソトロピー群が G_2 であ

ることから、(X, g_ϕ) のホロノミー群は G_2 の部分群となる。特に X がコンパクトで X の第一ベッチ数 $b_1(X)$ が消えているとき、(X, g_ϕ) のホロノミー群は G_2 に一致する。コンパクト G_2 多様体は Joyce により、最初に構成された ([Jo1])。これは 7 次元トーラス T^7 を G_2 の有限部分群 Γ で割った商空間 T^7/Γ から構成される。またコンパクトではないが、完備な G_2 多様体が知られている。X がコンパクト多様体のとき、X 上の G_2 構造全体を $\mathrm{Diff}_0(X)$ で同一視した G_2 構造のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{G_2}(X)$ は有限次元の滑らかな多様体である。associative 3 型式のコホモロジー類をとることにより、モジュライ空間は局所的に 3 次元の de Rham コホモロジー 群 $\mathrm{H}^3(X)$ の開集合でパラメトライズされる。([Br], [Jo3], [LM])

§**0-4 Spin**(7) **多様体.** 8 次元リーマン多様体 (X, g) のホロノミー群が Spin(7) となるとき、(X, g) を Spin(7) 多様体 Spin(7) manifold という。Spin(7) 多様体のリッチ曲率は零となる。コンパクト Spin(7) 多様体は単連結で、$\hat{A}$-種数 $\hat{A}(X)$ が 1 となる。V を Cayley 数全体 $\mathbb{O}$ のなす 8 次元ベクトル空間とする。V 上の 4 形式 Φ_0 を $\Phi_0(x, y, z, w) = \langle x \times y \times z, w\rangle$ として定義する。ここで 3 重積を $x \times y \times z = \frac{1}{2}\{x(\overline{y}z) - z(\overline{y}x)\}$ とし、$\overline{y}$ を y の共役とする。$\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_8(\mathbb{R})$ の $\wedge^4 V^*$ への線形表現を ρ とし、Φ_0 を通る軌道を $\mathcal{A}_{\mathrm{Spin}(7)}(V)$ とする：$\mathcal{A}_{\mathrm{Spin}(7)}(V) = \{\, \Phi_V = \rho_g \Phi_0 \mid g \in \mathrm{GL}(V)\,\}$。軌道 $\mathcal{A}_{\mathrm{Spin}(7)}(V)$ の元 Φ_V を V 上の Cayley 形式という。Cayley 形式 Φ_V のイソトロピー群は Spin(7) であり、Φ_V は非退化な正値対称 2 次形式 g_{Φ_V} を定める。X を 8 次元多様体とする。X 上の 4 次の閉微分形式 Φ が各 T_xX 上の Cayley 形式を与えるとき、Φ を X 上の Spin(7) 構造という。Spin(7) 構造 Φ はリーマン計量 g_Φ を定め、g_Φ の Levi-civita 接続 ∇ に関して、Φ は平行な微分形式となる。Φ のイソトロピー群は Spin(7) であるため、g_Φ のホロノミー群は Spin(7) の部分群となり、リッチ曲率は零となる。X が 8 次元コンパクト多様体とすると、X 上の Spin(7) 構造のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\mathrm{Spin}(7)}(X)$ は滑らかな多様体となっており、更に Spin(7) 構造 Φ の de Rham コホモロジー類をとることにより、写像 $P\colon \mathcal{M}_{\mathrm{Spin}(7)}(X) \to H^4(X)$ を定義すると、P は局所的に単射となる ([Jo2])。

§**0-5 キャリブレーション.** この節では、向きのついた多様体のみを考える。(X, g) を n 次元リーマン多様体とし、ϕ を X 上の p 次閉微分形式とする。各点 $x \in X$ で $\phi(x)$ の comass$\|\phi(x)\|$ が 1 以下のとき、ϕ を X 上のキャリブレーション Calibration という。ここで、$\|\phi(x)\| = \sup\{\langle \phi(x), v_1 \wedge \cdots \wedge v_p\rangle \mid$ ここで、$v_1, \cdots, v_p$は正規直交基底$\}$。ϕ をキャリブレーション、Y を任意のコンパクトな p 次元部分多様体とすると、不等式

$$\int_Y \phi \le \mathrm{Vol}(Y) \tag{1}$$

が成立する。(ここで、Vol (Y) は Y の体積。) X の p 次元部分多様体 M の体積要素を vol_M とする。ϕ の M への制限 $\phi|_M$ が vol_M と一致するとき、M を Calibrated 部分多様体という。M をコンパクトな Calibrated 部分多様体とし、コンパクトな p 次元部分多様体 Y の基本類 $[Y]$ が M の基本類 $[M]$ と一致するとする。このとき、(1) から不等式

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M \phi = \int_Y \phi \le \mathrm{Vol}(Y) \tag{2}$$

を得る。不等式 (2) から、コンパクト Calibrated 部分多様体 M はホモロジカルに体積極小な部分多様体となることが従う。以下、キャリブレーションの例を幾つか挙げる。(1) Kähler 形式 ω はキャリブレーションとなり、Kähler 多様体の複素部分多様体は Calibrated 部分多様体である。(2) 実 $2n$ 次元 Calabi-Yau 多様体 (X, Ω, ω) の正則 n 形式 Ω の実部 Ω^{Re} と虚部 Ω^{Im} はそれぞれキャリブレーションであり、Ω^{Re} に関する Calibrated 部分多様体をスペシャルラグランジアン Special Lagrangian という。スペシャルラグランジアン M はケーラー形式 ω についてラグランジアンで、Ω^{Im} を M に制限すると零となる n 次元部分多様体である。コンパクトなスペシャルラグランジアン M の変形空間は滑らかであり、M のコホモロジー群 $\mathrm{H}^1(M)$ でパラメタライズされる。(3) G_2 多様体 X の associative 3 形式 ϕ, coassociative4 形式 ψ はそれぞれキャリブレーションであり、Spin(7) 多様体の Cayley 形式 Φ もキャリブレーションとなる。([HL])

§1 特異点をもつ幾何構造の SMOOTHING に対する障害類

スペシャルホロノミー群をもつコンパクトなリーマン多様体を構成する際、まず特異点をもつ幾何構造を考え、これを smooth なものに変形する手法が取られる。Calabi-Yau, hyperKähler の場合なら、これらは複素多様体なので、特異点をもつ複素多様体の変形理論が適用できる。しかし G_2, Spin(7) 多様体は実多様体であり、特異点を許す変形理論はまだ開発されていない。これら四つの幾何構造は微分形式の立場から、捉えることが可能である。実際 smooth なものならば、四つの幾何構造を含む統一的な変形理論が構成できる [G]。ここでは特異点を許した変形理論を構成するための試みを行うことにする。まず、簡単のため $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造の変形を扱うことにする。これは標準束が自明な複素構造に対応する。

定義 **1-1 ($\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ structures).** V を $2n$ 次元の実ベクトル空間とする。V 上の複素 n 形式 ϕ に対して部分空間 $\mathrm{Ker}\phi$ を内部積を用いて、

$$\mathrm{Ker}\phi = \{\, v \in V \otimes \mathbb{C} \,|\, i_v\phi = 0\,\}$$

とする。ϕ が V 上の $SL_n(\mathbb{C})$ 構造であるとは V の複素化 $V \otimes \mathbb{C}$ が $\mathrm{Ker}\,\phi$ とその共役 $\overline{\mathrm{Ker}\,\phi}$ の直和になるときとする*:*

$$V \otimes \mathbb{C} = \mathrm{Ker}\,\phi \oplus \overline{\mathrm{Ker}\,\phi}.$$

$\mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(V)$ を V 上の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造全体とする。$\phi \in \mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(V)$ に対して V 上の概複素構造 I_ϕ を

$$I_\phi(v) = \begin{cases} -\sqrt{-1}v & \text{if } v \in \mathrm{Ker}\,\phi \\ \sqrt{-1}v & \text{if } v \in \overline{\mathrm{Ker}\,\phi} \end{cases}$$

とする．このとき、概複素構造 I_ϕ に関して、$\mathrm{Ker}\,\phi = T^{1,0}V$, $\overline{\mathrm{Ker}\,\phi} = T^{0,1}V$ となり、ϕ は non-zero な $(n,0)$ 型の形式となる。V 上の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造全体 $\mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(V)$ には $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ が推移的に作用し、イソトロピー群は $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ となるので、$\mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(V)$ は等質空間 $\mathrm{GL}(V)/\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ で与えられる。X を実 $2n$ 次元の多様体とし、各接ベクトル空間 T_xX 上の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造をすべて集めて X 上の等質空間束 $\mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(X)$ を

$$\mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(T_xX) \to X$$

とする。$\mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(X)$ は n 次微分形式全体の空間 $\wedge^n T^* \otimes \mathbb{C}$ の部分多様体とみなす。等質空間束 $A_{\mathrm{SL}}(X)$ の C^∞ global sections 全体を $\mathcal{E}_{\mathrm{SL}}(X)$ とする:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{SL}}(X) = \Gamma(X, \mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(X)).$$

global section $\phi \in \mathcal{E}_{\mathrm{SL}}(X)$ が与えられると X 上の概複素構造 I_ϕ が定まる。

Lemma 1-2. $\phi \in \mathcal{E}_{\mathrm{SL}}(X)$ が閉微分形式なら I_ϕ は積分可能であり、(X, I_ϕ) は標準束 K_X が自明な複素多様体となる。

Proof. Let $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ be a local basis of $\Gamma(\wedge^{1,0})$ with respect to Ω. From Newlander-Nirenberg's theorem it is sufficient to show that $d\theta_i \in \Gamma(\wedge^{2,0} \oplus \wedge^{1,1})$ for each θ_i. Since Ω is of type $\wedge^{n,0}$,

$$\theta_i \wedge \Omega = 0.$$

Since $d\Omega = 0$, we have

$$d\theta_i \wedge \Omega = 0.$$

Hence $d\theta_i \in \Gamma(\wedge^{2,0} \oplus \wedge^{1,1})$. $\square$

$\mathcal{E}_{\mathrm{SL}}(X)$ には引き戻しにより微分同相写像 f が作用する。このことに注意しながら、X 上の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造の moduli 空間 $\mathfrak{M}_{\mathrm{SL}}(X)$ を

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{SL}}(X) = \{\, \phi \in \mathcal{E}_{\mathrm{SL}}(X) \,|\, d\phi = 0 \,\} / \mathrm{Diff}_0(X),$$

とする、ここで $\mathrm{Diff}_0(X)$ は X の微分同相写像全体のなす群の単位元を含む連結成分とする。以下 $\phi \in \mathcal{E}_{\mathrm{SL}}(X)$ を X 上の概 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造、closed な概 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造を X 上の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造ということにする。次に $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造の局所変形を記述する複体を導入する。$\wedge^*$ を X 上の微分形式とし、$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造 ϕ に対して, X 上のベクトル束 $E^0(X)$ をベクトル場 v による内部積をもちいて、

$$E^0(X) = \{\, i_v\phi \in \wedge^{n-1} \,|\, v \in TX \,\}$$

とする。E^0 から生成される微分形式 $\wedge^*$ 上の graded module を $E(X) = \oplus_{k\le 0} E^k(X)$ とする、ここで、$E^k(X)$ は $\{\, \alpha \wedge i_v\phi \,|\, \alpha \in \wedge^k, v \in TX \,\}$ から $C^\infty(X)$ 上生成されている。$E^1(X)$ は線形表現 $\hat\rho$ を用いて、

$$E^1(X) = \{\, \hat\rho_a\phi \in \wedge^n \,|\, a \in \mathrm{End}(TX) \,\}$$

と表され、$\mathcal{E}_{\mathrm{SL}}(X)$ の ϕ における接空間とみなせる。

Lemma 1-3. $E(X)$ は外微分 d に関して *differetial graded module* となっており、複体*:*

$$(\#) \qquad 0 \longrightarrow E^0(X) \xrightarrow{d_0} E^1(X) \xrightarrow{d_1} E^2(X) \xrightarrow{d_2} \cdots$$

が得られる。

proof. 積分可能な概複素構造 I_ϕ に対して、$E^0(X) = \wedge^{n-1}$, $E^1(X) = \wedge^{n,0} \oplus \wedge^{n-1,1}$, $E^2(X) = \wedge^{n,1} \oplus \wedge^{n-1,2} \cdots$ より、これは明らか。しかし、この複体は一般の微分形式の系にたいして、存在する。そのため、一般化できる形で証明を与える: $E(X)$ は $E^0(X)$

から生成されているので、$E^0(X)$ の元 $i_v\phi$ を外微分した $di_v\phi$ が $E^1(X)$ にはいっていればよい。ベクトル場 v を生成する微分同相写像の one parameter family f_t にたいし、

$$di_v\phi = L_v\phi = \frac{d}{dt} f_t^*\phi|_{t=0}$$

が成立し、右辺は $\mathcal{E}_{\mathrm{SL}}(X)$ の ϕ での接空間 $E^1(X)$ に属することになる。 □

さて、特異点をもつ $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造を定義する際、これは複素解析空間の理論を使うことができるが、敢えて使わず、もっと素朴な形で理論を構成していくことにする。これは G_2, Spin(7) など、一般の微分形式の場合に拡張可能とするためである。以下、簡単のため孤立特異点の場合を考えることにする。

定義 1-4 (孤立特異点をもつ多様体). X を *Hausdorf* 空間とし、$\{p_i\}_{i=1}^l$ を X の有限集合とする。$(X, \{p_i\}_{i=1}^l)$ が孤立特異点をもつ多様体であるとは、次が成立することとする,

(1) $X\backslash\{p_i\}_{i=1}^l$ は多様体。
(2) 各 p_i の近傍 V_i が存在し、$p_j \notin V_i (j \neq i)$ であり、V_i から $\mathbb{R}^N$ の原点を中心とした半径 1 の *open ball* B^N への連続写像 $h_i \colon V_i \to B^N$ により、V_i は閉集合 $h_i(V_i)$ と同相となる。
(3) h_i の制限 $h_i|_{V_i\backslash\{p_i\}}$ は $V_i\backslash\{p_i\}$ の B^N への多様体としての埋め込みを与える。

$(X, \{p_i\}_{i=1}^l)$ を孤立特異点をもつ $2n$ 次元多様体とする。$S = \{p_i\}_{i=1}^l$, $X^{reg} = X\backslash S$ とする。X^{reg} は多様体であり、微分形式が普通に定義できる。

定義 1-5 ($\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$space). X^{reg} 上の $SL_n(\mathbb{C})$ 構造 ϕ を (X,S) の $SL_n(\mathbb{C})$ 構造と呼び、(X,S,ϕ) を $SL_n(\mathbb{C})$ *space* という。

次に $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ space(X,S) の変形を考える。

定義 1-6. $\pi \colon \mathcal{X} \to T$ を多様体 $\mathcal{X}$ から実 1 次元の開区間 $T \ni 0$ への C^∞ 写像で、$\pi^{-1}(0) \cong X$ であるとする。π の微分 $d\pi$ が $\mathcal{X}\backslash S$ 上で非退化とする。

$\wedge^*$ を多様体 $\mathcal{X}$ 上の differential forms, T の座標を t とし、$\pi^* dt$ により $\wedge^*$ 上生成される ideal を $\langle \pi^* dt\rangle$ とする。$\mathcal{X}$ 上の relative differential forms $\wedge^*_{rel}$ を

$$\wedge^*_{rel} = \wedge^*/\langle \pi^* dt\rangle$$

として定める。$\mathcal{X}$ 上の外微分作用素 d は ideal $\langle \pi^* dt\rangle$ を不変にするため、relative な外微分作用素 $d_{rel} \colon \wedge^*_{rel} \to \wedge^{*+1}_{rel}$ が induce される。$\mathcal{X}$ の fibre $\pi^{-1}(t)$ を X_t とし、relative differential form Φ の X_t への制限を $\phi_t = \Phi|_{X_t}$ とする

定義 1-7 ($\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造の変形). (X,S,ϕ) を $SL_n(\mathbb{C})$ *space* とし、$\pi \colon \mathcal{X} \to T$ を定義 *1-6* における *fibre* 空間とする。$\pi \colon \mathcal{X} \to T$ 上の *relative* な複素 n 形式 Φ が

(1) $d_{rel}\Phi = 0$
(2) $\Phi|_{X\backslash S} = \phi$
(3) $\Phi|_t \in \mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(X_t), \quad (t \neq 0)$

をみたすとき、$(\pi\colon \mathcal{X} \to T, \Phi)$ を $SL_n(\mathbb{C})space$ (X, S, ϕ) の変形という。

(X, S, ϕ) をコンパクトな $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$space とする。このとき、各 p_i の定義 1-4 における近傍 V_i もまた $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$space である。$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$space $(V_i, p_i, \phi|_{V_i\backslash\{p_i\}})$ の変形 $(\mathcal{V}_i, \Phi_i)$ を local smoothing と呼ぶ。それに対し (X, S, ϕ) の変形 $(\mathcal{X}, \Phi)$ を global smoothing と呼ぶことにする。各点 p_i ごとに、local smoothing $(\mathcal{V}_i, p_i, \Phi_i)$ が与えられたとする。このとき、global smoothing$(\mathcal{X}, \Phi)$ が存在し、各点 p_i の近傍への制限が local smoothing$(\mathcal{V}_i, p_i, \Phi_i)$ に一致するとき、これら local smoothing は global smoothign に拡張可能であるいう。このとき次の問題が自然に浮かび上がってくる:

問題. コンパクトな *$SL_n(\mathbb{C})space(X, S, \phi)$* の各特異点 p_i の *local smoothing* $(\mathcal{V}_i, p_i, \phi_i)$ が X の *global smoothing* に拡張可能であるのはいつか？

例えば、X を Kähler space で有限個の孤立特異点 $\{p_i\}_{i=1}^l$ を持つ Calabi-Yau とし、p_i の近傍が $\mathbb{C}^4$ 内の多項式 $f_i(z) = 0$ で与えられるとする。このとき、多項式 $f_i(z)$ を変形し、local smoothing が構成できる。これが X の変形に拡張できるか、という問題になる。

local smoothing $(\mathcal{V}_i, p_i, \Phi_i)$, $\pi_i\colon \mathcal{V}_i \to T$ にたいし、t を T の座標とし、T 上のベクトル場 $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ の $\mathcal{V}_i$ へのリフトをとり、$\hat{\partial}_t$ とする。ここで、∂_t のリフトとは $\mathcal{V}_i\backslash\{p_i\}$ 上の C^∞ ベクトル場で $\pi_*\hat{\partial}_t = \partial_t$ をみたすものとする。(これは unique ではない。) このとき、ベクトル場 $\hat{\partial}_t$ による π^*dt の Lie 微分 $L_{\hat{\partial}_t}\pi^*dt = 0$ となり、Lie 微分 $L_{\hat{\partial}_t}$ は $\mathcal{V}_i$ 上の relative forms への作用

$$L^{rel}_{\hat{\partial}_t}\colon \wedge^*_{rel} \to \wedge^*_{rel}$$

を induce する。このとき、外微分は Lie 微分と可換なことから、$[d_{rel}, L^{rel}_{\hat{\partial}_t}] = 0$ となる。これから、$\mathcal{V}_i$ 上の relative closed n form Φ_i にたいし、$d_{rel}L^{rel}_{\hat{\partial}_t}\Phi_i = 0.$

定義 1-8. *$L^{rel}_{\hat{\partial}_t}\Phi_i$ の $V_i\backslash\{p_i\}$ への制限は d-closed な n 形式となり、その定める de Rham cohomology class を $\alpha^{(1)}_{i,top} \in \mathrm{H}^n(V_i\backslash\{p_i\}, \mathbb{C})$ とする。同様に Lie 微分を N 階繰り返し、$(L^{rel}_{\hat{\partial}_t})^N\phi$ から定まる de Rham cohomology class を $\alpha^{(N)}_{i,top} \in \mathrm{H}^n(V_i\backslash\{p_i\}, \mathbb{C})$ とする。*

この定義での $\alpha^{(N)}_{i,top}$ は topological な情報のみを使っている。更に精密に幾何構造をみて cohomology class を定めることができる: $V_i^{reg} = V_i\backslash\{p_i\}$ とし、V_i^{reg} 上での $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造の変形 complex

$$(\#) \qquad 0 \longrightarrow E^0(V_i^{reg}) \longrightarrow E^1(V_i^{reg}) \longrightarrow E^2(V_i^{reg}) \longrightarrow \cdots$$

において、$L^{rel}_{\hat{\partial}_t}\Phi_i$ の V_i^{reg} への制限は $E^1(V_i^{reg})$ の closed な元となる。更に、

Lemma 1-9. *$\hat{\partial}'_t$ をもう一つ別の ∂_t のリフトとすると、*

$$L^{rel}_{\hat{\partial}_t}\Phi_i|_{V_i^{reg}} - L^{rel}_{\hat{\partial}'_t}\Phi_i|_{V_i^{reg}} \in dE^0(V_i^{reg})$$

が成立する。これから、$L^{rel}_{\hat\partial_t}\Phi_i|_{V_i^{reg}}$ はリフトの取り方によらず、*complex* $\#$の *cohomology group* の元 $\alpha_{i,geo} \in \mathrm{H}^1(V_i^{reg},\#)$ を定める。

$\alpha_{i,geo} \in \mathrm{H}^1(V_i^{reg},\#)$ は複素構造の変形における小平ースペンサー類に対応する。以下、$\alpha_{i,geo}$ を局所変形に associate した変形類ということにする。$\Gamma_{cpt}(V_i^{reg},E^k)$ を E^k の compact support をもつ section 全体とする。 同様に $\Gamma_0(V_i^{reg},E^k)$ を p_i のある有界な近傍に support を持つ section 全体、逆に $\Gamma_\infty(V_i^{reg},E^k)$ を p_i のある有界な近傍で零となる section 全体とする。(V_i^{reg} は $\mathbb{R}^N$ に埋め込まれていることに注意。) このとき、complex $\# = (E^*,d)$ にたいし短完全列

$$0 \to \Gamma_{cpt}(V_i^{reg},E^*) \to \Gamma_0(V_i^{reg},E^*)\oplus\Gamma_\infty(V_i^{reg},E^*) \to \Gamma(V_i^{reg},E^*) \to 0$$

が存在する。この短完全列が導く coboundary map を

$$\delta_{geo}\colon \mathrm{H}^1(V_i^{reg},\#) \to \mathrm{H}^2_{cpt}(V_i^{reg},\#)$$

とする。同様に de Rham complex $\wedge^*$ から導かれる coboundary map を

$$\delta_{top}\colon \mathrm{H}^n(V_i^{reg},\mathbb{C}) \to \mathrm{H}^{n+1}_{cpt}(V_i^{reg},\mathbb{C})$$

とする。

定義 1-10 (障害類). 定義 *1-8, lemma 1-9* で与えられた $\alpha^{(N)}_{i,top}$, $\alpha_{i,geo}$ に *coboundary map* をそれぞれ作用させたものを、

$$\beta^{(N)}_{i,top} := \delta_{top}\alpha^{(N)}_{i,top} \in \mathrm{H}^{n+1}_{cpt}(V_i^{reg},\mathbb{C}),$$
$$\beta_{i,geo} := \delta_{geo}\alpha_{i,geo} \in \mathrm{H}^2_{cpt}(V_i^{reg},\#)$$

とする。*inclusion*$V_i^{reg} \hookrightarrow X\backslash S$ により $\beta^{(N)}_{i,top}, \beta_{i,geo}$ をそれぞれ $X\backslash S$ の *compact support cohomology class* とみなすことにする。このとき、位相的な障害類 $\beta^{(N)}_{top}$ と幾何的な障害類 β_{geo} をそれぞれ

$$\beta^{(N)}_{top} = \sum_i \beta^{(N)}_{i,top} \in \mathrm{H}^{n+1}_{cpt}(X\backslash S,\mathbb{C})$$
$$\beta_{geo} = \sum_i \beta_{i,geo} \in \mathrm{H}^2(X\backslash S,\#)$$

とする。すなわち、$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$space (X,S,ϕ) にたいして、local smoothing (V_i,p_i,ϕ_i) が与えられると、cohomology class $\beta^{(N)}_{top}(N=1,2,\cdots)$ と β_{geo} が定まることになる。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^1(V_i^{reg},\#) & \xrightarrow{\delta_{geo}} & \mathrm{H}^2_{cpt}(V_i^{reg},\#) \\ & & \downarrow \\ & & \mathrm{H}^2(X\backslash S,\#) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^n(V_i^{reg}) & \xrightarrow{\delta_{top}} & \mathrm{H}^{n+1}_{cpt}(V_i^{reg}) \\ & & \downarrow \\ & & \mathrm{H}^{n+1}_{cpt}(X\backslash S) \end{array}$$

これらを障害類というのは次の定理による:

定理 **1-11.** *$SL_n(\mathbb{C})space(X,S,\phi)$ の local smoothing(V_i,p_i,ϕ_i) が global smoothing に拡張可能ならば、$\beta^{(N)}_{top}=0$ かつ $\beta_{geo}=0$ である。*

local smooothing が与えられると各特異点 p_i ごとに局所的にサイクルが決まり、これらのサイクルが X のなかで、どのような位置関係にあるかを見るのが位相的な障害類 $\beta^{(N)}_{top}$ で、サイクルの変化を N 階の微分までみていることになる。一方 β_{geo} は Hodge 構造の変形に関連した障害類で、$\beta_{geo}=0$ なら infinitesimal な意味で global smoothing が存在することになる。位相的な障害類は比較的計算ができるものである。

§2 位相的な障害類 $\beta^{(N)}_{top}$ の計算

§**2-1** 複素 3 次元 **ordinary double points.** $\mathbb{C}^4$ の多項式 $f_t(z_0,z_1,z_2,z_3)=z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2-at$ の零点集合を V_t とする (a は零でない定数)。V_0 は原点のみを特異点とし、これを ordinary double point という。一方 $V_t(\neq 0)$ は smooth である。V の変形 $\mathcal{V}$ を

$$\mathcal{V}=\{\,(z,t)\in\mathbb{C}^5\mid f_t(z)=0\},$$

として与える。このとき、

$$\phi_t=\mathrm{Res}_{f_t(z)=0}\frac{dz_0\wedge dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3}{f_t(z)}$$

により、$\mathcal{V}$ 上に relative 3 form Φ が与えられ、$(\mathcal{V},0,\Phi)$ は $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ 構造の変形となる。$V_0\backslash\{0\}$ は $S^2\times S^3$ に変位レトラクトで、$\mathrm{H}_2(V^{reg})$, $\mathrm{H}_3(V^{reg})$ の生成元をそれぞれ $[S^2]$, $[S^3]$ とする。このとき、compact support cohomology に関する双対性 $\mathrm{H}^4_{cpt}(V^{reg})\cong\mathrm{H}_2(V^{reg})$ のもと、$\beta^{(1)}_{top}\in\mathrm{H}^4_{cpt}(V^{reg})$ は 2 次元サイクル $a[S^2]$ で与えられる。(X,S,ϕ) を ordinary double points $S=\{p_i\}_{i=1}^l$ のみをもつ $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$space とする。local smoothing が $f_0(z)=a_it$ で与えられるとき、この local smoothing が X の global smoothing に拡張するためには

$$\beta^{(1)}_{top}=\sum_i a_i[S_i^2]=0\in\mathrm{H}_2(X\backslash S) \tag{1}$$

が必要条件である。ここで、$[S_i^2]$ は各 V_i^{reg} の 2 サイクルを $V_i^{reg}\hookrightarrow X\backslash S$ により、$X\backslash S$ のサイクルとみたものとする。ordinary double points をもつ Calabi-Yau の smoothing については (1) が必要十分条件である [Fr], [Ra], [Ti2]。代数幾何、複素幾何では X の small resolution$\pi\colon\tilde{X}\to X$ を使う。以下詳述するように特異点 p_i の逆像 $l_i=\pi^{-1}(p_i)$ は有理曲線 であり、同型 $\mathrm{H}_2(\tilde{X})\cong\mathrm{H}_2(X\backslash S)$ のもと、条件 (1) は次の条件 (2) と同値である:

$$\sum_i a_i[l_i]=0\in\mathrm{H}^2(\tilde{X}) \tag{2}$$

(2) から $\tilde{X}$ が Kähler ならサイクル $[l_i]$ は non-trivial で、特に ordinary dounle point を一つしか持たない Calabi-Yau は smoothing が出来ないことが従う。代数幾何において、更に複雑な特異点をもつ Calabi-Yau 3-folds の smoothing が議論されている。[NS], [Gr].

§**2-2** 複素 $n=2m+1$ 次元 **ordinary double points.** 以上の議論はそのまま高次元に拡張できる。$\mathbb{C}^{n+1}$ の hypersurface$f_t(z)$ を

$$f_t(z)=\sum_{i=0}^{n} z_i^2 - at$$

とし、$V_t=\{f_t(z)=0\}$ とする。このとき、$\mathcal{V}=\{(z,t)\in\mathbb{C}^{n+2}|f_t(z)=0\}$ により、V_0 の変形が得られ、これは $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$space V_0 の変形を与える。$\mathrm{H}_n(V_0^{reg})\cong \mathrm{H}_{n-1}(V_0^{reg})\cong\mathbb{Z}$ であり、生成元をそれぞれ $[S^n]$, $[S^{n-1}]$ とする。このとき、$\beta_{top}^{(m)}$ は同一視 $\mathrm{H}^{n+1}_{cpt}(V_0^{reg})\cong \mathrm{H}_{n-1}(V_0^{reg})$ のもと、$(n-1)$ 次元サイクル $[S^{n-1}]$ で与えられる。(X,S,ϕ) を $n=2m+1$ 次元の ordinary double points $S=\{p_i\}$ をもつ $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$space とする。各 p_i での loacl smoothing が $\{f_0(z)-a_it=0\}$ で与えられるとき、障害類 $\beta_{top}^{(N)}\in \mathrm{H}_{2m}(X\backslash S)$ は

$$\beta_{top}^{(N)}=\begin{cases} \sum_i a_i[S_i^{n-1}] & \text{if } N=m, \\ 0 & \text{if } N\neq m \end{cases} \tag{1}$$

この場合も X の small resolution $\pi\colon \tilde{X}\to X$ が存在し、$\pi^{-1}(p_i)$ は m 次元射影空間 $\mathbb{C}\mathbf{P}_i^m$ で与えられる。同型 $H_{2m}(\tilde{X})\cong \mathrm{H}_{2m}(X\backslash S)$ のもと、条件 $\beta_{top}^{(m)}=0$ は次の (2) と同値となる:

$$\sum_i a_i[\,\mathbb{C}\mathbf{P}_i^m]=0\in \mathrm{H}_{2m}(\tilde{X})\cong \mathrm{H}_{n-1}(\tilde{X}) \tag{2}$$

§3 一般の微分形式（系）への拡張

V を n 次元の実ベクトル空間とし、$\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_l)\in\oplus_{i=1}^{l}\wedge^{p_i}V^*$ を V 上の forms の system とする。このとき、$\mathrm{GL}(V)$ の forms の system への作用を ρ とし、ϕ を通る軌道を $\mathcal{A}(V)$ とする:

$$\mathcal{A}(V)=\{\,\rho_g\phi\,|\,g\in \mathrm{GL}(V)\,\}\subset\oplus_{i=1}^{l}\wedge^{p_i}V^*.$$

このとき、$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造のときと同様に、軌道 $\mathcal{A}(V)$ に対応し多様体 X 上の閉微分形式の systemϕ を考えることが出来る。この ϕ を軌道 $\mathcal{A}(V)$ から決まる幾何構造と呼ぶ。この考え方により、Calabi-Yau, hyperKähler, G_2, Spin(7) など様々な幾何構造が統一的に捉えることができる（0 章参照)。$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造のときに構成した、障害類 $\beta_{top}^{(N)}$, β_{geo} は軌道 $\mathcal{A}(V)$ から決まる幾何構造に対して、自然に拡張できる。例えば、ordinary double points の場合、small relolution を symplectic 構造 ω(高次元では ω^m) の変形として捉え、その障害類をみることにする。

§3-1 Symplectic 構造 ω と ω^m の場合の障害類

$n=2m+1$ 次元 ordinary double point V_0 を

$$V_0=\{\,(u_0,v_0,\cdots,u_n,v_n)\in\mathbb{C}^{m+1}\times\mathbb{C}^{m+1}\,|\,\sum_i u_iv_i=0\,\}$$

として、V_0 を $\{v_0 = \cdots = v_m = 0\}$ で blown up したものを $\tilde{V}_0$ とする:

$$\tilde{V}_0 = \{\, (u, v, [w]) \in \mathbb{C}^{2m+2} \times \mathbb{C}\mathbf{P}^m \mid \sum u_i v_i = 0,\ v_i w_j = v_j w_i \,\}.$$

$\tilde{V}_0$ は $\mathbb{C}\mathbf{P}^m$ 上の rank $m+1$ の vector bundle である。ω_t を $\tilde{V}_0$ 上の Kähler forms の C^∞ family で $\pi\colon \tilde{V}_0 \to \mathbb{C}\mathbf{P}^m$ の零 section(0) に制限すると、Fubini-Studt 計量 ω_{FS} の t 倍となっているものとする:

$$\omega_t|_{(0)} = t\,\pi^*\omega_{\mathrm{FS}}. \tag{3}$$

このような計量 ω_t は $n = 3$ なら Kähler quotient として、また高次元でも直接、構成できる。ω_t は singular な symplectic space(V_0, ω_t) の local smoothing を与えているとみる。 更に ω_t^m を考え、$2m$ 次非退化微分形式 (V_0, ω_0^m) の local smoothing とみなす。V_0^{reg} の cohomology は small resolution $\tilde{V}_0$ を使い

$$\mathrm{H}_n(V_0^{reg}) \cong \mathrm{H}_{n-1}(V_0^{reg}) \cong \mathrm{H}_{n-1}(\tilde{V}_0) \cong \mathrm{H}_{2m}(\mathbb{C}\mathbf{P}^m) \cong \mathbb{Z}$$

で与えられる。同型 $\mathrm{H}^{2m+1}_{cpt}(V_0^{reg}) \cong \mathrm{H}_{2m+1}(V_0^{reg})$ と $n = 2m+1$ に注意すると、障害類 $\beta^{(m)}_{top}$ は (3) から、$\mathrm{H}_n(V_0^{reg})$ の生成元 $[S^n]$ となる。すると、(X, S, ω^m) を $2m$ 次非退化微分形式をもつ singular space で、singular point p_i で上記 (V_0, ω_i^m) に一致するとする。各 p_i ごとに small resolution の上に ω_i^m の変形 $\omega_i^m(t)$ が与えられ、零 section への制限が

$$\omega_i^m(t)|_{(0)} = b_i t \pi^* \omega_{FS}$$

となるとする $(b_i \neq 0)$。Local smoothing が (X, S, ω) の global smoothing に拡張する必要条件は

$$\beta^{(m)}_{top} = \sum_i b_i [S_i^n] \in \mathrm{H}_n(X \backslash S)$$

となる。ここで、$\mathrm{H}_n(V_0^{reg})$ の生成元 $[S_i^n]$ は inclusion $V_0^{reg} \hookrightarrow X\backslash S$ により、$\mathrm{H}_n(X\backslash S)$ の元とみている。このように $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造の global smoothing に関する障害類と Kähler 形式を m 回 wedge した ω^m の global smoothing に関する障害類は互いに dual の関係があることが、見て取れる。

References

[Be] A.L.Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **10**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987.

[B] A. Beauville, *Varietés Kählériennes dont la première classe de Chern et nulle*, Journal of Differential Geomegatry **18** (1983), 755-782.

[Bo] F. A. Bogomolov, *Hamiltonian Kähler manifolds*, Dolk. Akad. Nauk SSSR **243 no. 5** (1978), 1101–1104.

[Br] R. Bryant, *Metrics with exceptional holonomy*, Ann of Math **126** (1987), 525-576.

[Ca] P.Candelas and X.C. de la Ossa, *Moduli space of Calabi-Yau manifolds*, Nuclear Phys. B **355** (1991), 455–481.

[F] R. Friedman, *Simultaneous resolution of threefold double points*, Math. Ann. **274** (1986), 41-81.

[G] R. Goto, *Moduli sapces of topological ccalibrations, Calabi-Yau, hyperKähler, G_2, Spin*(7) *structures*, math.DG/0112197.

[HL] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated geomegatries*, Acta Mathematica **148** (1982), 47-157.

[Jo1] D.D.Joyce, *Compact Riemannian* 7*-manifolds with holonomy G_2,* I, II, J.Differential Geomegatry **43** (1996), 291-328, 329-375.

[Jo2] D.D. Joyce, *Compact* 8*−manifolds with holonomy Spin*(7), Inventiones mathematicae **128** (1996), 507-552.

[Jo3] D.D. Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford mathematical Monographs, Oxford Science Publication, 2000.

[LM] H.B. Lawson, Jr and M. Michelsohn, *Spin Geomegatry*, Princeton University press, 1989.

[NS] Y. Namikawa and J. Sttenbrink, *Global smoothing of Calabi-Yau threefolds*, Invent. Math **122** (1995), 403-419.

[O] T. Ochiai, *On the automorphism group of a G-structure*, J. Math. Soc. Japan **18 No. 2** (1966), 189-193.

[Ra] Z. Ran, *Essays in mirror manifolds*, Internat. Press, 1992, pp. 451-457.

[Sa] S.Salamon,, *Riemannian geomegatry and holonomy groups*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 201, Longman, Harlow, 1989.

[Ti1] G.Tian, *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Peterson-Weil metric*, Mathematical aspects of string theory (ed. S.-T. Yau), **10** (1987), Advanced Series in Mathematical Physics, World Scientific Publishing Co., Singapore, 629–646..

[Ti2] G. Tian, *Essays on mirror manifolds*, Internat. Press, 1992, pp. 458-479.

[Y] S.T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I*, Com.Pure and Appl. Math **31** (1978), 339-411.