阪市大集中講義 20050627〜0701

§1. 合成積

まずかんたんな設定（しかし本質はあらわれる）

X, Y：有限集合

$\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)$：$\mathbb{C}$-valued function の全体

$K(x,y)$：$X \times Y$ 上の函数

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$$
$$f \mapsto (K * f)(x) = \sum_{y \in Y} K(x,y) f(y)$$

$\underbrace{X, Y}_{K}, \underbrace{Y, Z}_{K'}$　合成積の合成 $\mathcal{F}(Z) \to \mathcal{F}(X)$

は $\sum_{y \in Y} K(x,y) K'(y,z)$

で与えられる.

$X=Y$ のとき　$\mathcal{F}(X \times X)$ は結合律をみたす

（一般には非可換の）環

単位元：Δ_X：対角線集合の特性関数

$\mathcal{F}(X)$ は $\mathcal{F}(X \times X)$ の表現空間

<u>Exercise</u>　$\# X = n$ とすると　$\mathcal{F}(X \times X) \cong \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$

$\mathcal{F}(X)$：ベクトル表現 $= \mathbb{C}^n$

例1 岩堀-ヘッケ代数 (for $\mathfrak{sl}_2$)

$k = \mathbb{F}_q$: 有限体 $\qquad \# k = q$

$\mathbb{P}^1(k) = \{ \ell \subset k^2 \mid 1$次元部分空間$\}$

$= \left\{ [z_0 : z_1] \;\middle|\; \begin{array}{l} (z_0, z_1) \neq (0,0) \text{ で} \sim \\ [z_0 : z_1] = [\lambda z_0 : \lambda z_1] \quad \lambda \in k^\times \end{array} \right\}$

特に $\# \mathbb{P}^1(k) = \underbrace{q}_{[1:z]} + \underbrace{1}_{[0:1]}$

$SL_2(k) \curvearrowright \mathbb{P}^1(k)$

$\mathcal{F}(\mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k))^{SL_2(k)} = \mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k)$ 上の $SL_2(k)$-不変な関数全体

: $\mathcal{F}(\mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k))$ の部分環

$\mathcal{F}(\mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k))^{SL_2(k)}$ は

$\mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k)$ の $SL_2(k)$-軌道の特性関数を基底にもつ.

軌道の分類:

$(p_1, p_2) \in \mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k)$

$p_1 = [1:0]$ としてよい. $\quad \underset{\text{のうち}}{SL_2(k)} \ni \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ は p_1 を保つ

$p_2 = [z_0 : z_1]$ は $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 + \lambda z_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ にうつす.

$\therefore$ $p_2 = [1:0]$ or $[0:1]$ にうつせる.

i.e. 軌道は Δ と $\underset{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \Delta}{T_1}$ の2つ

Δ = 単位元

$$(T * T)(x, z) = \sum_{y \in \mathbb{P}^1} T(x, y)\, T(y, z)$$

$$= \#\{ y \in \mathbb{P}^1(k) \mid x \neq y,\ y \neq z \} = \begin{cases} q-1 & x \neq z \\ q & x = z \end{cases}$$

$$= (q-1)\, T + q\Delta$$

$$\therefore (T - q\Delta) * (T + \Delta) = T * T - (q-1) T - q\Delta = 0$$

<u>例2</u> 量子展開環 (Beilinson – Lusztig – MacPherson)

$k = \mathbb{F}_q$　　N : 自然数 (fix)

$\mathcal{G} = k^N$ の subspace 全体のなす Grassmann 多様体

$= \mathcal{G}_0 \sqcup \mathcal{G}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{G}_N$　　$\mathcal{G}_d$ = d 次元部分空間全体

$\mathcal{F}(\mathcal{G} \times \mathcal{G})^{GL_N(k)}$: 合成積による環となる.

<u>Lemma</u>. $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ の $GL_N(k)$-orbit は 2×2 の行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ で } a_{ij} \in \mathbb{N},\ \sum a_{ij} = N$$

となるもので　$(V, V') \leftrightarrow$
$$\begin{aligned} a_{11} &= \dim V \cap V' \\ a_{12} &= \dim V / V \cap V' \\ a_{21} &= \dim V' / V \cap V' \\ a_{22} &= \dim (k^N / V + V') \end{aligned}$$

によってパラメトライズされる.

Δ_d : g_d の対角線集合 $\leftrightarrow \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & N-d \end{bmatrix}$

$e_d \leftrightarrow \begin{bmatrix} d-1 & 0 \\ 1 & N-d \end{bmatrix}$

$= \left\{ (V, V') \mid V \subset V',\ \begin{matrix} \dim V = d-1 \\ \dim V' = d \end{matrix} \right\}$

$f_d \leftrightarrow \begin{bmatrix} d & 1 \\ 0 & N-d-1 \end{bmatrix}$

$= \left\{ (V, V') \mid V \supset V',\ \begin{matrix} \dim V = d+1 \\ \dim V' = d \end{matrix} \right\}$

$\tilde{e} = \sum e_d$, $\tilde{f} = \sum f_d$

$$(e_d * e_{d+1})(V, V'') = \#\{ \underset{d\text{-dim}}{V'} \mid V \subset V' \subset V'' \}$$

$$= \begin{cases} \# \mathbb{P}^1(V''/V) & V \subset V'' \\ 0 & V \not\subset V'' \end{cases}$$

$$= (q+1) \cdot \begin{bmatrix} d-1 & 0 \\ 2 & N-d-1 \end{bmatrix}$$

d次元

$$(e_{d+1} * f_d)(V, V'') = \#\{ \underset{(d+1)\text{-dim}}{V'} \mid V \subset V' \supset V'' \}$$

• $V \neq V''$ のとき.

$V + V''$: $d+1$次元 のときは $V' = V + V''$

$\begin{bmatrix} d-1 & 1 \\ 1 & N-d-2 \end{bmatrix}$

$V + V''$: $(d+2)$ 次元以上 のときは 条件をみたす V' は存在しない.

・$V = V''$ のとき

$$(e_{d+1} f_d)(V, V) = \#\mathbb{P}(k^N/V) = 1+q+\cdots+q^{N-\overbrace{\dim V}^{= d}-1}$$

同様に

$$(f_{d-1} * e_d)(V, V'')$$

$$= \#\{ \underset{d-1\text{:dim}}{V'} \mid V \supset V' \subset V'' \}$$

d 次元

・$V \cap V''$: $d-1$ 次元のとき　$V' = V \cap V''$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} d-1 & 1 \\ 1 & N-d-1 \end{bmatrix}$$

・$V \cap V''$: $d-2$ 次元以下のときは

そのような V' は存在しない

・$V \cap V''$: d 次元 i.e. $V = V''$ のとき

$$(f_{d-1} * e_d)(V, V) = \#\mathbb{P}(V^*) = 1+q+\cdots+q^{\overbrace{\dim V}^{= d}-1}$$

次のように正規化すると式が対称的になってきれいになる.

$$e = \sum_d v^{d-N} e_d, \quad f = \sum v^{-d} f_d$$

$$k = \sum_d v^{N-2d} \Delta_d$$

とおく.

但し $v = \sqrt{q}$

次の関係式が成立つ

$$kk^{-1}=k^{-1}k=1$$

$$kek^{-1}=v^{2}e \quad , \quad kfk^{-1}=v^{-2}f$$

$$ef-fe=\frac{k-k^{-1}}{v-v^{-1}}$$

これが量子展開環
$U_v(\mathfrak{sl}_2)$
の定義関係式

<u>Th.</u> $\Phi : U_v(\mathfrak{sl}_2) \to$ 函$(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})^{GL_N(k)}$

$$e, f, k \mapsto e, f, k$$

は環準同型であり，全射である．

<u>Exercise</u>．全射性を示せ．

○表現の構成　　函$(\mathfrak{g})^{GL_N(k)}$

: $\mathfrak{g}_d$ 上の定数関数を基底とするベクトル空間

c_dとおく．　(N+1次元)

表現となる

$$k*c_d = v^{N-2d}c_d$$

$$(e*c_d)(V) = v^{d-N}\#\{V' \mid \overset{d-1}{V} \underset{余次元1}{\subseteq} V'\}$$

$$= v^{d-N}(1+\cdots+q^{N-d})\,c_{d-1}$$

$$= v^{d-N}\frac{1-q^{N-d+1}}{1-q} = \frac{v^{N-d+1}-v^{-N+d-1}}{v-v^{-1}}$$

$$= [N-d+1]_v \cdot c_{d-1}$$

同様．$f*c_d = [d+1]_v\, c_{d+1}$　　$c_0 \rightleftarrows c_1 \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows c_N$