○ $\mathbb{C}[x,y]$ のイデアル I で $\mathbb{C}[x,y]/I$ が

有限次元になるものを調べる。

例0

$I = \mathbb{C}[x,y]$ $\qquad \mathbb{C}[x,y]/I = 0$

何もない状態（真空）

例1

$I = (x, y)$ $\qquad x$ と y で生成される イデアル

極大イデアル

Exercise

$\mathbb{C}[x,y]$ の極大イデアルは $(x-a, y-b)$ $\quad (a,b) \in \mathbb{C}^2$

とかける。

二変数でなくて一変数のとき（あとでは使わない）

$\mathbb{C}[x]$ は単項イデアル整域であるから

$I = (f(x))$

$\mathbb{C}[x]/I$: $\dim = \deg f$

$\longleftrightarrow$ $f=0$ の根 重複度まで込めて $\deg f$ 個

上のようなイデアル…有限個の点の類似

$I \subset \mathbb{C}[x,y]$ に対して

$\mathrm{Supp}\, \mathbb{C}[x,y]/I$

$\overset{\mathrm{def.}}{=} \{ p \in \mathbb{C}^2 \mid f(p) = 0 \ \ {}^\forall f \in I \}$ とおく.

$p_1, \cdots, p_N$: $\mathbb{C}^2$ の N コの相異なる点に対し

$I_{\{p_1,\cdots,p_N\}} \overset{\mathrm{def.}}{=} \{ f \in \mathbb{C}[x,y] \mid f(p_1) = \cdots = f(p_N) = 0 \}$

- $\mathbb{C}[x,y]/I_{\{p_1,\cdots,p_N\}}$ は N 次元 as vector space

(∵ $0 \to I_{\{p_1\cdots p_N\}} \hookrightarrow \mathbb{C}[x,y] \longrightarrow \mathbb{C}^N \to 0$

$\quad {}^\forall f \longmapsto (f(p_1) \cdots f(p_N))$

- $I_{\mathrm{Supp}\,\mathbb{C}[x,y]/I} \supset I$

(実は 左辺 $= \sqrt{I} = \{ f \in \mathbb{C}[x,y] \mid f^r \in I$ some $r > 0 \}$

by Hilbertの零点定理

∴ $\mathbb{C}[x,y]/I_{\mathrm{Supp}\,\mathbb{C}[x,y]/I} \twoheadleftarrow \mathbb{C}[x,y]/I$

↑ 有限次元!

高々 $\dim \mathbb{C}[x,y]/I$ 次元

∴ $\mathrm{Supp}\,\mathbb{C}[x,y]/I$ は 高々 N 個の点である.

ちょうど $I = I_{\mathrm{Supp}\, \mathbb{C}[x,y]/I}$ となるとき

$$I = I_{\{p_1, \cdots, p_N\}} \quad \{p_1, \cdots, p_N\} = \mathrm{Supp}\, \mathbb{C}[x,y]/I$$

まとめ

$I = \sqrt{I}$ で

$\mathbb{C}[x,y]/I$ が N 次元となるイデアル

$\longleftrightarrow$ $\mathbb{C}^2$ の N コの相異なる点

次に

$N = 2$ で $\mathrm{Supp}\, \mathbb{C}[x,y]/I$ が一点のみからなるときを考える。

一点は原点としてよい。

$I \subset (x, y)$ となる。

$1 \bmod I \neq 0$

$x \bmod I$

$y \bmod I$

は一次従属

$\therefore \quad ax + by + c \bmod I = 0$

i.e. $ax + by + c \in I$

$I \subset (x, y)$ より $c = 0$ i.e. $ax + by \in I$

また

$x \bmod I = \lambda \bmod I$ とすると $x - \lambda$, or $y - \lambda \in I$

or $y \bmod I =$ 〃 $\Rightarrow \lambda = 0$

$x \bmod I = 0 = y \bmod I$ とすると

$I = (x, y)$ となり $\mathbb{C}[x,y]/I$ ：1次元で不適

上より $x \bmod I \neq 0$ とする。

$x \bmod I$ と $1 \bmod I$ は一次独立 （$b=1$ としてよい）

$$x^2 \bmod I = \overset{c}{\cancel{a}} \cdot x \bmod I + \overset{d}{\cancel{b}} \cdot 1 \bmod I$$

上と同様に $\overset{}{\cancel{b}}_{d} = 0$

$$x^2 - cx \in I$$

$$(ax+y,\ x^2-cx)$$

$c \neq 0$ のときは、
I の元は
$(c, -ac) \neq (0,0)$
で必ず消える。
矛盾

$$\therefore (ax+y,\ x^2) = I$$

同様に $y \bmod I$ と $1 \bmod I$ が一次独立のときは

$$(x+ay,\ y^2) = I$$

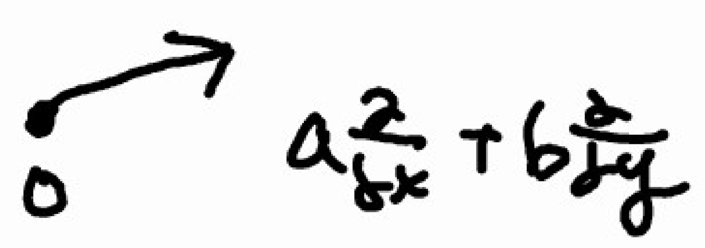
$(a,b) \neq (0,0)$

両方統一的にあらわすのは $(x^2, y^2, ax+by)$

これは

$$I = \left\{ f \,\middle|\, f(0,0)=0,\ a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0 \right\}$$

と同じである。



これが $n=2$ のときのイデアル I の全てである。

$n \geq 3$ のときは複雑になってくるので例だけのべる.

単項式イデアル（単項式を生成元にもつもの）

y^2	xy^2	
y	xy	x^2y
1	x	x^2

単項式を左図のように並べ，イデアルに属さないものを □ で囲う.

$\Rightarrow$ Young 図型をえる.

これらは torus 作用
（$(x,y) \mapsto (sx,ty)$　$(s,t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ から誘導されるもの）
の固定点である。

行列との対応

$V = \mathbb{C}[x,y]/I$　；n 次元ベクトル空間

$\circlearrowleft B_x, B_y$　　$B_x(f \bmod I) = xf \bmod I$

$B_y(f \bmod I) = yf \bmod I$

性質 ① $[B_x, B_y] = 0$

② V は $1 \bmod I$ を cyclic vector にもつ

i.e. $B_x^l B_y^m 1 \bmod I$ $(= x^l y^m \bmod I)$ で V ははられる.

逆に ①② をみたすものがあれば

$I = \{ f(x,y) \mid f(B_x, B_y) 1 \bmod I = 0 \}$

として I が定義される。

$$\left\{ I \subset \mathbb{C}[x,y] \;\middle|\; \dim \mathbb{C}[x,y]/I = n \right\}$$
イデアル

$$\underset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ (B_x, B_y, v) \;\middle|\; \begin{array}{l} ① [B_x, B_y] = 0 \\ ② v : \text{cyclic} \end{array} \right\} \Big/ GL_n(\mathbb{C})$$

$\mathrm{Supp}\, \mathbb{C}[x,y]/I$ = B_x, B_y の同時固有値の集合

例 $B_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$ $B_y = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$

$v = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

対応するイデアル $I = (x^n, y - (a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}))$

$\Gamma \subset SU_2$ 有限部分群（自明でないとする）

分類が知られている

A_n 型：巡回群 $\mathbb{Z}/_{(n+1)}\mathbb{Z}$ $\begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{bmatrix}$

D_n 型：有理正二面体群

E_n ：有理正多面体群

($n=6,7,8$)

群論に親しみがない人は、巡回群だけ考えていれば十分。

Γ で不変な $\mathbb{C}[x,y]$ のイデアル I で

$\mathbb{C}[x,y]/_I$ が有限次元になるものを調べる。

例0 $I=\mathbb{C}[x,y]$ は Γ-inv.

例1 $I=(x,y)$ は Γ-inv.

$I=(x-a, y-b)$ が Γ-inv.

となるのは $a=b=0$ のときのみ

○ I : Γ-不変 $\Rightarrow$ $\mathrm{Supp}\,\mathbb{C}[x,y]/I$ も Γ-不変

よって Γ-軌道の union になる.

$\gamma \in \Gamma \subset SU_2$

固有値は λ, λ^{-1} $|\lambda|=1$

$\therefore$ $\gamma \neq \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ のとき 固有値は 1 でない

$\therefore$ $\Gamma \curvearrowright \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ は自由

$\left(\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \ \forall p \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \ \ \gamma \cdot p = p \Rightarrow \gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

Γ-軌道は a) 原点一点のみ

b) ちょうど $\#\Gamma$ 個の点

$p, \gamma_1 p, \cdots \gamma_N p$

$(\Gamma = \{e, \gamma_1, \cdots, \gamma_N\})$

<u>系</u> $\dim \mathbb{C}[x,y]/I < \#\Gamma \Rightarrow \mathrm{Supp}\,\mathbb{C}[x,y]/I$ は原点のみからなる

$\dim \mathbb{C}[x,y]/I = \#\Gamma$ のときは

$\mathrm{Supp}\,\mathbb{C}[x,y]/I$ は原点のみか

もしくは, ちょうど $\#\Gamma$-1 個の Γ-軌道からなる.

2005-06-28 8ページ

$N=2$ のとき

$\#\Gamma = 2, > 2$ で状況がちがう

$\mathbb{Z}/2 = \{\pm 1\}$

$\#\Gamma > 2$ のとき

$\overset{\bullet}{0} \longrightarrow v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ のタイプしかありえない

Γ が A型でなければ すべての $\gamma \in \Gamma$ について同時固有値となる v は存在しない

Γ がA型のとき $v = \frac{\partial}{\partial x}$ or $\frac{\partial}{\partial y}$ の2通りがある。

$\#\Gamma = 2$ のとき

$\times p$　$\cdot 0$　$\times -p$

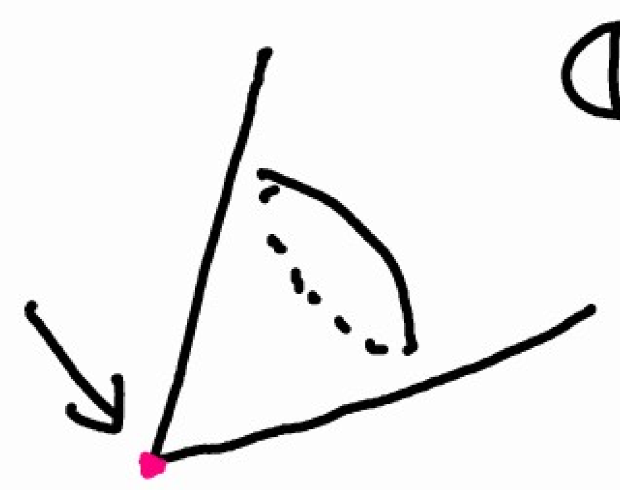
相異なる2点で軌道になってるもの

$\gamma . v = v, -v$ だが…

$\overset{\bullet}{0} \longrightarrow v$ どんな v もOK.

orbitの全体　$\mathbb{C}^2/\pm 1$

原点



原点を射影空間でおきかえ

イデアルの全体

$\mathbb{CP}^1$

○ $\mathbb{C}[x,y]/I$ は Γの表現空間である.

$\gamma \cdot f = (\gamma^{-1})^* f$

$(\gamma_1\gamma_2)\cdot f$
$= (\gamma_1\gamma_2)^{-1*} f$
$= (\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1})^* f$
$= \gamma_1^{-1*}\gamma_2^{-1*} f$
$= \gamma_1\cdot(\gamma_2\cdot f)$

$\mathbb{C}[x,y]$ の表現であったことと合わせると

$\mathbb{C}[x,y]\#\Gamma$ (smash product) の表現になる.

$\downarrow$

$f(x,y)\cdot\gamma$

$$\left(f_1(x,y)\cdot\gamma_1\right) \times \left(f_2(x,y)\cdot\gamma_2\right)$$
$$= f_1(x,y)(\gamma_1^{*}f_2)(x,y)\cdot\gamma_1\gamma_2$$

<u>check.</u>

$$\{(f_1\cdot\gamma_1)\times(f_2\cdot\gamma_2)\}\times(f_3\cdot\gamma_3)$$
$$= f_1\,\gamma_1^{*}f_2\cdot\gamma_1\gamma_2)\times(f_3\cdot\gamma_3)$$
$$= f_1\,\gamma_1^{*}f_2\,\underline{(\gamma_1\gamma_2)^{-1*}f_3}\cdot\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

$$(f_1\cdot\gamma_1)\times\{(f_2\cdot\gamma_2)\times(f_3\cdot\gamma_3)\}$$
$$=(f_1\cdot\gamma_1)\times f_2\,\gamma_2^{-1*}f_3\cdot\gamma_2\gamma_3)$$
$$= f_1\,\gamma_1^{-1*}f_2\,\underline{\gamma_1^{-1*}\gamma_2^{-1*}f_3}\cdot\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

$(\gamma_1\gamma_2)^{-1*}f_3 = (\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1})^* f_3 = \gamma_1^{-1*}\gamma_2^{-1*}f_3$ より OK.

有限群の表現論より

任意の有限次元表現は既約表現の直和に分解する.

A_{n-1}型 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のとき

既約表現はすべて1次元で

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{bmatrix} \longmapsto \gamma^{i} \qquad (i=0,1,\cdots,n-1)$$

自明表現

で与えられる. これらを $\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{n-1}$ とおく

$$\Big(\rho_i = \underbrace{\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_1}_{i\text{コ}} \Big)$$

$N=3$ で $\Gamma=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n\geqq 3)$のときを考える.

$\mathbb{C}[x,y]/I$ の表現空間の可能性を考える.

(キヤク) (分解の)

$n\geqq 4$ のとき

$1 \bmod I$ … ρ_0 (自明表現) は必ず入る.

その次 $x \bmod I$ … ρ_1

$y \bmod I$ … ρ_{n-1}

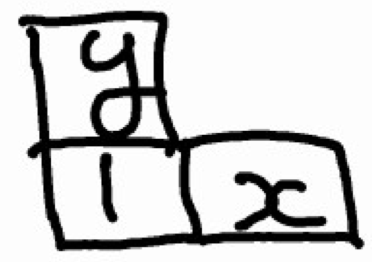
$xy \bmod I$ … ρ_0

$x^2 \bmod I$ … ρ_2

$y^2 \bmod I$ … ρ_{n-2} ｝ $n=4$のときは同じだけれど
それ以外はすべて
異なる.

ρ_1, ρ_{n-1} が共に入っていないと

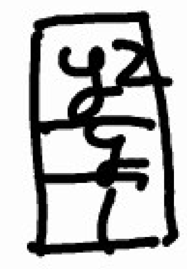
$x, y\in I \Rightarrow I=(x,y)$ 不適

$\rho_0\oplus\rho_1\oplus\rho_{n-1}$ … $I=(x^2, xy, y^2)$ 

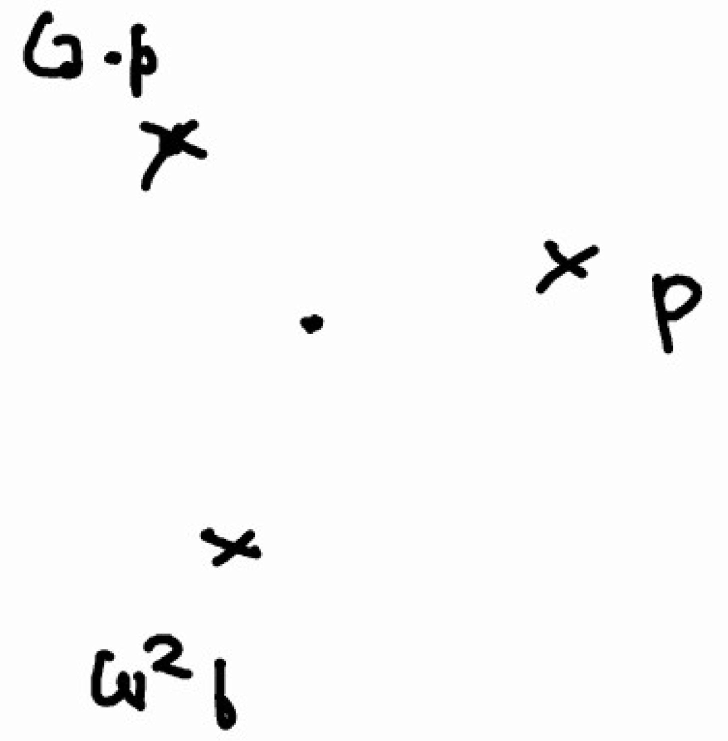
OK

$\rho_0\oplus\rho_1\oplus\rho_2$ … $I=(x^3, y)$ 

OK

$\rho_0\oplus\rho_{n-1}\oplus\rho_{n-2}$ 

$n=3$ のとき



ρ_0, ρ_1, ρ_2 : 既約表現

free orbit はありえる。

(表現は $\rho_0 \oplus \rho_1 \oplus \rho_2$)

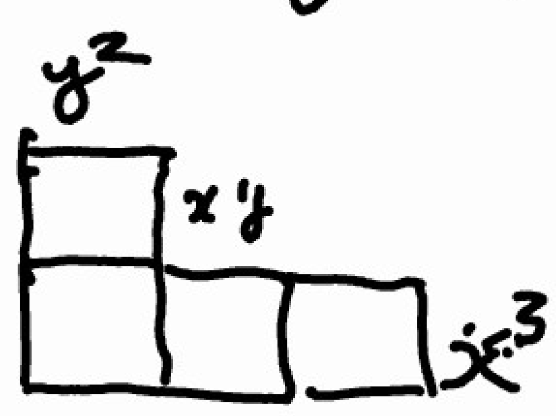
以下表現が $\rho_0 \oplus \rho_1 \oplus \rho_2$ になるものを調べる。

先の3つの単項式イデアル はそうである。

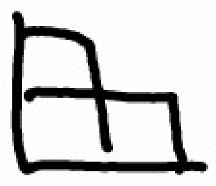
Q. どうつながっているか？

○ $\boxed{1}\boxed{x}\boxed{x^2}$ と $\begin{array}{ll}\boxed{y} & \\ \boxed{1} & \boxed{x}\end{array}$ の $\boxed{x^2}$ と $\boxed{y}$ をつなぐ

$I=(xy, y^2\ x^3, py+qx^2)$



$[p:q] \in \mathbb{CP}^1$

○  と  をつなぐ $I=(xy. y^3, x^2, px+qy^2)$