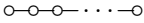
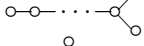
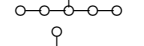
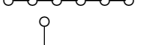
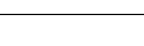


Instantons on ALE spaces and canonical bases

東北大学理学部 中島 啓 (Hiraku Nakajima)

序

単純特異点とは、 $SU(2)$ のある有限部分群 Γ に対して $\mathbb{C}^2/\Gamma$ とかけるような特異点のことで古くからよく研究されている。その分類も与えられており、すべて $\mathbb{C}^3$ 内の超曲面として書ける。その極小特異点解消の例外集合の双対グラフを描くと Dynkin 図式に二重線のないもの (すなわち ADE 型) が現れることが知られている。(下表を参照) また、Brieskorn[Br], Slodowy[Sl] によれば、対応する単純 Lie 環の nilpotent variety を使うことによって $\mathbb{C}^2/\Gamma$ を構成することが出来、さらにその半普遍変形とその同時極小特異点解消を Lie 環の言葉を用いて構成することが可能である。Kronheimer[Kr] は、これらを extended Dynkin diagram 上の quiver を用いて作ることに成功した。しかもその構成から自然に空間は Riemannian signature の Einstein 方程式の解を与えることが従った。この空間を (A_n 型のときに) 構成した物理学者に従って ALE 空間と呼ぶことにしよう。

ルート系	Γ	Dynkin 図式	超曲面
A_n	位数 $n+1$ の巡回群		$x^{n+1} + yz = 0$
D_n	位数 $4(n-2)$ の二項二面体群		$x^2 + y^2z + z^{n-1} = 0$
E_6	二項四面体群		$x^2 + y^3 + z^4 = 0$
E_7	二項八面体群		$x^2 + y^3 + yz^3 = 0$
E_8	二項二十面体群		$x^2 + y^3 + z^5 = 0$

Kronheimer の仕事に触発されて筆者は、ALE 空間の上の反自己相対接続のモジュライ空間を研究し出したのであるが、共同研究 [KN] によってモジュライ空間は ALE 空間の自然な高次元化であることが見えてきた。

一方 Brieskorn-Slodowy の理論でもやはり単純特異点の高次元化は自然に現れ、(flag manifold の unipotent transformation の fixed point set など) Springer 表現とも関連してよく研究されている。筆者のモジュライ空間の幾何に関する研究 [Na] も、その高次元化の analogy を追うことから始まった。

そこでまず §1 で nilpotent variety の幾何について復習し、次に §2 でモジュライ空間の定義を与える。§§3,4 でモジュライ空間の幾何学的性質について述べて、§5 で Lusztig による (quantized) enveloping algebra の構成との関連を与える。

幾何学的な側面や反自己双対接続を偏微分方程式の解として考える立場などについては、この講演の主旨から外れると思われるために省略してある。そのために、motivation がやや希薄になってしまったのは残念なことである。

§ 1. nilpotent varieties についての復習

この節の記号は、以降の節の記号とは同じ記号でも意味が違って使われる可能性があるので注意すること。

複素単純 Lie 群 G がその Lie 環 $\mathfrak{g}$ に adjoint 作用で作用している状況を考える。 $\mathfrak{g}/G$ を $\mathfrak{g}$ 上の G -不変な多項式の全体に対応する variety とする。 W を対応する Weyl 群とする。 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ を Cartan subalgebra とするとき、Chevalley の定理により、 $\mathfrak{g}/G = \mathfrak{h}/W$ となることが知られている。よって

$$\chi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}/W$$

という morphism を得る。このとき、

- (1) 上の写像は、 $\mathfrak{g}$ の元の semi-simple part を取って、対角化することに他ならない。
- (2) 各 fiber は、次元 $= \dim \mathfrak{g} - \text{rank } \mathfrak{g}$ の normal variety。
- (3) 各 fiber は、有限個の G -orbit の union。
- (4) 各 G -orbit は、symplectic form を持つ。(Kirillov-Kostant)

が成り立つ。

x を通る G -orbit を $\mathcal{O}_x$ と書くことにする。特に

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def.}}{=} \chi^{-1}(0) = \{x \in \mathfrak{g} \mid 0 \in \overline{\mathcal{O}_x}\}$$

を $\mathfrak{g}$ の nilpotent variety という。 $\mathcal{N}$ に含まれる orbit を nilpotent orbit という。一般に $\mathcal{N}$ は非常に複雑な特異点を持った affine algebraic variety である。

また $\mathcal{N}$ は、orbit ごとに分解することによって自然な stratification を持つ:

$$\mathcal{N} = \bigcup \mathcal{O}_x$$

$\mathcal{N}$ の中で、 $\mathcal{N}$ と同じ次元を持つ orbit が唯一つ存在する。この orbit を regular orbit と呼ぶ。また、(複素数体上) 余次元が丁度 2 の orbit も唯一つ存在する。これを subregular orbit という。(各

orbit は (holomorphic な) symplectic form を持つので偶数次元である。) 例えば、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1; \mathbb{C})$ のときには、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

がそれぞれ regular orbit と subregular orbit を定める。

一般に nilpotent element $x \in \mathcal{N}$ が与えられたときに、準同型 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}$ で、 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ が、 x にうつされるものが、 $Z_G(x)$ による conjugate を除いて唯一つ存在することが知られている (Jacobson-Morozov の Lemma)。 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のうつる先を y であらわす。

このとき、 $\mathcal{O}_x$ の x における接空間は、次の affine space で与えられる。

$$T_x \mathcal{O}_x = x + [\mathfrak{g}, x]$$

ここで、 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(y) = \{z \in \mathfrak{g} \mid [y, z] = 0\}$ が、 $[\mathfrak{g}, x]$ の $\mathfrak{g}$ での補空間であることに注意すると、

$$S = x + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(y)$$

は、 $\mathcal{O}_x$ の x における transversal slice である。(local に $\mathcal{O}_x$ と transversal に交わっているだけでなく、実際には交点は x しかないことが知られている。)

定理 1.1 [Br, Sl]. Lie 環 $\mathfrak{g}$ は、ADE 型とする。subregular element $x \in \mathcal{N}$ に対して上のように transversal slice S を取る。このとき $S \cap \mathcal{N} = S \cap \chi^{-1}(0)$ は、対応する単純特異点 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ であり、 $\chi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}/W$ の S への制限は、その単純特異点の semi-universal deformation を与える。

次に、Springer-Grothendieck の特異点解消を復習する。 $B \subset G$ を Borel subgroup とする。その Lie 環を $\mathfrak{b}$ とする。 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ と分解する。 $(\mathfrak{n}$ は、 $\mathfrak{b}$ の nilradical) flag manifold G/B 上の vector bundle を $G \times_B \mathfrak{b}$ によって定義する。このとき、次の図式を考える。

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccc} G \times_B \mathfrak{b} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{g} \\ \downarrow \theta & & \downarrow \chi \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{h}/W \end{array}$$

但し、 $\psi([g, b]) \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Ad}(g)b$, $\theta([g, h + n]) \stackrel{\text{def.}}{=} h$ ($g \in G$, $b \in \mathfrak{b}$, $h \in \mathfrak{h}$, $n \in \mathfrak{n}$) と定義する。

定理 1.3 (Grothendieck). 上の図式は、 $\chi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}/W$ の同時特異点解消を与える。

例えば $\theta^{-1}(0) = G \times_B \mathfrak{n}$ は、 $\mathcal{N}$ の特異点解消である。容易に分るように、 $G \times_B \mathfrak{n}$ は flag manifold G/B の cotangent bundle である。

定理 1.4. 特異点解消 $\psi: G \times_B \mathfrak{n} \rightarrow \mathcal{N}$ は、 $\mathcal{N}$ の orbit による stratification に関して semi-small である。すなわち、 $2 \dim \psi^{-1}(x) \leq (x \text{ を含む stratum の codimension})$ が成り立つ。(実際には、等号が成立することが分る。)

定理 1.5 [Br, Sl]. 上の図式を、 $S \subset \mathfrak{g}$ と $\psi^{-1}(S)$ に制限したもの

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(S) & \xrightarrow{\psi} & S \\ \downarrow \theta & & \downarrow \chi \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{h}/W \end{array}$$

は、 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の semiuniversal deformation $\chi: S \rightarrow \mathfrak{h}/W$ の同時特異点解消を与える。

今は subregular orbit に対する transversal slice のみ考えたが、実際には全く同じ証明で、一般の orbit $\mathcal{O}_x$ に対する transversal slice について $\chi: S \rightarrow \mathfrak{h}/W$ の同時特異点解消を与える。

この geometry の応用として monodromy 表現を考える。すなわち、 $\mathfrak{h}$ から、root の定める hyperplane を除いたものを $\mathfrak{h}'$ と書いて

$$\chi: S \cap \chi^{-1}(\mathfrak{h}') \rightarrow \mathfrak{h}'/W$$

を考える。このとき、

- (1) 上の写像は、fiber bundle になる。
- (2) $\pi: \mathfrak{h}' \rightarrow \mathfrak{h}'/W$ は covering である。(もちろん covering group は、Weyl 群 W である。)
- (3) fiber bundle χ を π によって引き戻すと trivial になる。
- (4) fiber は、 $F = \theta^{-1}(0) \cap \psi^{-1}(S)$ 、すなわち定理 1.5 において、 $S \cap \mathcal{N}$ の特異点解消になっているもの、と微分同相である。
- (5) F は、 $\psi^{-1}(x) \subset G \times_B \mathfrak{n}$ と homotopy 同値である。

以上によって、monodromy 表現として $H^*(\psi^{-1}(x); \mathbb{R})$ に Weyl 群の表現が構成される。

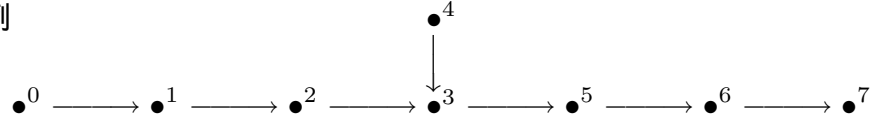
定理 1.6 (Springer, Slodowy, and others). 上のやり方で $H^{\text{top}}(\psi^{-1}(x); \mathbb{R})$ に Weyl 群の表現を構成するとそれは既約であり、逆に全ての既約表現はある x に対して上のやり方で構成される。

普通は、intersection cohomology を用いた定義が使われる。(分解定理を利用するため) これは、上の monodromy 表現と一致することが知られている。

§ 2. quiver による多様体の構成

ADE 型の extended Dynkin 図式を考える。頂点の数を $n+1$ とする。頂点の間を結んでいる線に向きをつけ、その全体を Ω とする。向きを逆にしたものを $\bar{\Omega}$ であらわす。また、頂点に 0 から n まで番号付けする。このとき highest root の -1 倍に対応する頂点は番号 0 にすると約束する。

E_7 の向きの例



頂点と 0 から n までの数を同一視し、例えば k から l へ向かう矢印があるときに $k \rightarrow l \in \Omega$ などと書くことにする。

各頂点の上に hermite 内積の入った複素ベクトル空間の pair (V_k, W_k) をおき、

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &\stackrel{\text{def.}}{=} \left(\bigoplus_{l \rightarrow k \in \Omega} \text{Hom}(V_l, V_k) \right) \oplus \left(\bigoplus_m \text{Hom}(W_m, V_m) \right), \\ \mathbf{M} &\stackrel{\text{def.}}{=} \left(\bigoplus_{l \rightarrow k \in \Omega \cup \bar{\Omega}} \text{Hom}(V_l, V_k) \right) \oplus \left(\bigoplus_m \text{Hom}(W_m, V_m) \oplus \text{Hom}(V_m, W_m) \right) \end{aligned}$$

と定義する。ベクトル空間 V_k と W_k を固定していることを強調したいときには、次元 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ を

$$\mathbf{v} = (\dim V_0, \dots, \dim V_n)^t, \quad \mathbf{w} = (\dim W_0, \dots, \dim W_n)^t$$

によって定めて、 $\mathbf{N}(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ などと書く。

例えば、 A_2 型るとき $\mathbf{M}$ の元は下図のようになる。

図のように $\mathbf{M}$ の元に対し、その $\text{Hom}(V_k, V_l)$ 成分を $B_{l,k}$, $\text{Hom}(V_k, W_k)$ 成分を j_k , $\text{Hom}(W_k, V_k)$ 成分を i_k と書く。

通常、quiver の表現と言った時には各頂点の上に一つのベクトル空間 V_k をおいたものを考えるが、 W_k もおくことは後々大切になってくる。また、hermite 内積を考えるのもあまり普通ではなく、一般の体上で考えるのが普通であるが、これについても後々 quiver の表現のモジュライ空間上で微分幾何を展開する上で、リーマン計量を定義するのに必要になってくる。

M には、 $G \stackrel{\text{def.}}{=} U(V_0) \times U(V_1) \times \cdots \times U(V_n)$ が自然に作用し、線型作用でありかつ hermite 内積を保つ。Lie group G についても次元を強調したいときには G_v と書く。

ベクトル空間 M 上に symplectic form を次で与える。

$$(2.1) \quad \omega_{\mathbb{C}}((B, i, j), (B, i', j')) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum \text{tr}(\varepsilon(k, l) B_{k,l} B'_{l,k}) + \sum \text{tr}(i_m j'_m - i'_m j_m),$$

但し、 $k \rightarrow l \in \Omega$ のとき $\varepsilon(k, l) = 1$ で、 $k \rightarrow l \in \bar{\Omega}$ のとき $\varepsilon(k, l) = -1$ と定義する。N は M の Lagrangian subspace であり、M は N の cotangent bundle であると思える。 G の複素化 $G^{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def.}}{=} GL(V_0) \times GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_n)$ も M に自然に作用するが、これは $\omega_{\mathbb{C}}$ を保つ。このとき原点 0 で値 0 をとる moment map¹⁾ を $\mu_{\mathbb{C}}$ とする。具体的には

$$(2.2) \quad \mu_{\mathbb{C}}(B, i, j) = \left(\sum_{l: k \rightarrow l \in \Omega \cup \bar{\Omega}} \varepsilon(k, l) B_{k,l} B_{l,k} + i_k j_k \right)_k \in \bigoplus_k \mathfrak{gl}(V_k) = \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{C}.$$

で与えられる。ここで、tr によって $\mathfrak{g}$ とその dual space を同一視した。 $\mu_{\mathbb{C}}$ が M 上で holomorphic であることを注意しておく。

ベクトル空間 M には、 V_k, W_k の hermite 計量から来る自然な hermite 計量が入ることに注意して、M を Kähler 多様体と思うことにする。compact group G は、Kähler 構造を保つ。そこで

Kähler form²⁾ を symplectic form と思って、原点 0 で値 0 をとる moment map を $\mu_{\mathbb{R}}$ とする。
具体的には

$$(2.3) \quad \mu_{\mathbb{R}}(B, i, j) = \frac{i}{2} \left(\sum_{l: k \rightarrow l \in \Omega \cup \overline{\Omega}} B_{k,l} B_{k,l}^{\dagger} - B_{l,k}^{\dagger} B_{l,k} + i_k i_k^{\dagger} - j_k^{\dagger} j_k \right) \in \bigoplus_k \mathfrak{u}(V_k) = \mathfrak{g}^*$$

で与えられる。³⁾

パラメーター $\zeta_{\mathbb{C}}^{(1)}, \dots, \zeta_{\mathbb{C}}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $\zeta_{\mathbb{R}}^{(1)}, \dots, \zeta_{\mathbb{R}}^{(n)} \in \mathbb{R}$ に対して、 $\zeta_{\mathbb{C}} \in \bigoplus_k \mathfrak{gl}(V_k)$ を、 $\mathfrak{gl}(V_k)$ 成分が $\zeta_{\mathbb{C}}^{(k)} \text{id}_{V_k}$ となるように定める。但し、 $\zeta_{\mathbb{C}}^{(0)} = -\zeta_{\mathbb{C}}^{(1)} - \dots - \zeta_{\mathbb{C}}^{(n)}$ と約束する。 $\zeta_{\mathbb{R}}$ も同様に定める。このとき

$$(2.4) \quad \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}_{\zeta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{(B, i, j) \in \mathbf{M} \mid \mu_{\mathbb{R}}(B, i, j) = i\zeta_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{C}}(B, i, j) = -\zeta_{\mathbb{C}}\}/G$$

と定義する。 $\mu_{\mathbb{R}}(B, i, j) = i\zeta_{\mathbb{R}}$ を real ADHM⁴⁾ 方程式、 $\mu_{\mathbb{C}}(B, i, j) = -\zeta_{\mathbb{C}}$ を complex ADHM 方程式と呼ぶ。

定義 2.5. $\mathfrak{M}$ の部分集合 $\mathfrak{M}^{\text{reg}}$ を isotropy group が trivial になる G -orbit の全体とする。

定理 2.6 [HKLR]. (1) (空集合でないならば) $\mathfrak{M}^{\text{reg}}$ は C^{∞} 多様体であり、その実次元は $2\mathbf{v}^t(2\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{v})$ で与えられる。但し $\tilde{\mathbf{C}}$ は extended Cartan matrix である。

(2) $\mathfrak{M}^{\text{reg}}$ は hyper-Kähler 多様体⁵⁾ になる。よって特に複素多様体になり、Kähler 計量と正則な symplectic form を持つ。

(1) の次元公式から、特に $\mathbf{w} = 0$ の時には $\mathfrak{M}^{\text{reg}}$ は空集合であることが分かる。

これ以降、 $V_0 = W_0 = 0$ を仮定する。すなわち、extended Dynkin diagram 上の quiver ではなく、普通の Dynkin diagram 上の quiver を扱う。この仮定は、いくつかの定理において本質的に用いられるが、たいていの場合は、ある modification をすれば成立する場合もある。この仮定の下で成立する一番よいことは、次である。

定理 2.7 [KN]. $V_0 = W_0 = 0$ であり、かつ ζ が generic のとき $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{\text{reg}}$ である。 $\mathfrak{M}$ の hyper-Kähler 計量は完備である。

real ADHM 方程式は、hermitian adjoint の情報を含んでいるために、このままでは扱いが難しいことが多い。次の事実は、 $\mathfrak{M}$ を具体的に調べる際に非常に役に立つことが多い。

定理 2.8. complex ADHM 方程式の解集合 $\{(B, i, j) \in \mathbf{M} \mid \mu_{\mathbb{C}}(B, i, j) = -\zeta_{\mathbb{C}}\}$ の中で、その点を通る $G^{\mathbb{C}}$ -orbit が $\mu_{\mathbb{R}}^{-1}(i\zeta_{\mathbb{R}})$ とぶつかるものの全体を $\mathcal{U}$ と書くことにする。このとき

- (1) $\mathcal{U}$ は $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(-\zeta_{\mathbb{C}})$ の $G^{\mathbb{C}}$ -invariant な開集合であり、その補集合は subvariety である。
- (2) 射影 $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/G^{\mathbb{C}}$ は $G^{\mathbb{C}}$ -principal bundle の構造を持つ。
- (3) 次の自然な写像は、同相写像である。

$$\mathfrak{M} = (\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(-\zeta_{\mathbb{C}}) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(i\zeta_{\mathbb{R}})) / G \longrightarrow \mathcal{U}/G^{\mathbb{C}}$$

定理 2.8 により、定理 2.6 の (2) の statement は “自然に” 解釈される。すなわち $G^{\mathbb{C}}$ の作用が holomorphic であることから商空間 $\mathcal{U}/G^{\mathbb{C}}$ は複素構造を持つ。また、symplectic form の存在は Marsden-Weinstein quotient⁶⁾ から説明される。但し、Kähler 計量の存在は説明されない。

例 2.9. 一番簡単な A_1 型の extended Dynkin diagram で $V_0 = W_0 = 0$, $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = v_1$, $\dim_{\mathbb{C}} W_1 = w$ の場合を考えてみよう。さらに parameter は、 $\zeta_{\mathbb{C}}^{(1)} = 0$, $\zeta_{\mathbb{R}}^{(1)} = \frac{1}{2}$ と仮定してみよう。

$$\begin{array}{ccc} V_1 & & \\ i_1 \updownarrow j_1 & \left\{ \begin{array}{l} i_1 j_1 = 0 \\ i_1 i_1^\dagger - j_1^\dagger j_1 = -1 \end{array} \right. & \\ W_1 & & \end{array}$$

定理 2.8 の $\mathcal{U}$ を調べてみる。 (i_1, j_1) が $i_1 j_1 = 0$ を満たしているとき、その $G^{\mathbb{C}}$ -orbit が real ADHM 方程式の解集合とぶつかるためには、

$$\exists \alpha \in \mathrm{GL}(V_1) \quad \text{such that} \quad \alpha i_1 i_1^\dagger \alpha^\dagger - \alpha^{\dagger-1} j_1^\dagger j_1 \alpha^{-1} = -1$$

が必要十分条件である。 $\alpha = \alpha^\dagger$ と仮定して一般性を失わない。このとき、 j_1 が単射であることは必要である。逆に j_1 が単射であれば、

$$\alpha^{-1} = (2j_1^\dagger j_1)^{-1} \left(1 + \sqrt{1 + 4i_1 i_1^\dagger j_1^\dagger j_1} \right)$$

と定義すれば、real ADHM 方程式が満たされる。そこで写像 $\pi: M = \mathcal{U}/\mathrm{GL}(V_1) \rightarrow \mathrm{Grass}(v_1, W_1)$ を (i_1, j_1) を通る $\mathrm{GL}(V_1)$ -orbit に対して j_1 の像のなす W_1 の v_1 次元部分空間を対応させることによって定義する。これは $\mathrm{GL}(V_1)$ -orbit の点の取り方によらずに well-defined である。 π の fiber は $i_1 j_1 = 0$ を満たす i_1 の全体であり、すなわち $\mathrm{Hom}(W_1/\mathrm{im} j_1, V_1)$ である。これから、 $\mathcal{U}/\mathbb{C}^*$ がグラスマンの cotangent bundle $T^*\mathrm{Grass}(v_1, W_1)$ であることが分かる。

後で必要になる affine algebro-geometric quotient と実パラメーター $\zeta_{\mathbb{R}}$ が 0 の variety の関係について state しておこう。

定理 2.10 [Ki, Ne]. 実パラメーター $\zeta_{\mathbb{R}}$ が 0 のとき次の一対一対応がある。

$$\mathfrak{M}_{(0, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \xrightarrow{\cong} \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(-\zeta_{\mathbb{C}}) // G_{\mathbf{v}}^{\mathbb{C}}$$

ここで、 $//$ は、affine algebro-geometric quotient⁷⁾ の意味である。

例 2.11. 例 2.9 と同様に A_1 型るときで、 $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = v_1$, $\dim_{\mathbb{C}} W_1 = w_1$ の場合を考えてみよう。

$$\begin{array}{c} V_1 \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ i_1 \parallel j_1 \\ \downarrow \end{array} \\ W_1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} i_1 j_1 = 0 \\ i_1 i_1^{\dagger} - j_1^{\dagger} j_1 = 0 \end{array} \right.$$

このとき不変式論で、

$$\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) // G_{\mathbf{v}}^{\mathbb{C}} \ni (i_1, j_1) \mapsto j_1 i_1 \in \text{End}(W_1)$$

が埋め込みを与えることがしられている。(例えば [KP] を見よ。) $i_1 j_1 = 0$ より $A = j_1 i_1$ は、rank が高々 $\dim V_1$ の $A^2 = 0$ を満たす行列である。実際に上の写像の image はそのような行列の全体である。

パラメーター $(\zeta_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{C}})$ に対応する空間 $\mathfrak{M}_{(\zeta_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ とパラメーター $(0, \zeta_{\mathbb{C}})$ に対応する空間 $\mathfrak{M}_{(0, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ を考えよう。 $(\zeta_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{C}})$ が generic になるように $\zeta_{\mathbb{R}}$ を取っておく。定理 2.8 によって写像

$$\pi: \mathfrak{M}_{(\zeta_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{U} / G_{\mathbf{v}}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(-\zeta_{\mathbb{C}}) // G_{\mathbf{v}}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{M}_{(0, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

が定義される。このとき次が成立する。

このとき次が成り立つ。

定理 2.12. 上の写像 π は、 $\mathfrak{M}_{(0, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ の特異点解消を与える。

例 2.13. A_1 型で、例 2.9、2.11 のときに上の特異点解消は、

$$T^* \text{Grass}(r, W_1) = \{(A, C) \in \text{End}(W_1) \times \text{Grass}(r, W_1) \mid A|C = 0, \text{im } A \subset C\}$$

という記述で (A, C) に対して、 A を対応することにより得られる。

例 2.14. $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ が次の data で与えられるモジュライ空間でパラメーターが $-\zeta$ となるもの (i.e., $\mathfrak{M}$) を ALE 空間といい、 X と書く。

$$\begin{array}{lcl}
& 0 & 0 \\
A_n : & \mathbf{v} = 1 \text{---} 1 \text{---} 1 \text{---} \cdots \text{---} 1 \text{---} 1 \text{---} 1, & \mathbf{w} = 1 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \cdots \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 1 \\
D_n : & \begin{array}{c} 0 \qquad \qquad 1 \\ | \qquad \qquad | \\ \mathbf{v} = 1 \text{---} 2 \text{---} 2 \text{---} \cdots \text{---} 2 \text{---} 2 \text{---} 1, \end{array} & \begin{array}{c} 0 \qquad \qquad 0 \\ | \qquad \qquad | \\ \mathbf{w} = 0 \text{---} 1 \text{---} 0 \text{---} \cdots \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \end{array} \\
E_6 : & \begin{array}{c} \qquad \qquad 0 \\ \qquad \qquad | \\ \qquad \qquad 2 \\ \qquad \qquad | \\ \mathbf{v} = 1 \text{---} 2 \text{---} 3 \text{---} 2 \text{---} 1, \end{array} & \begin{array}{c} \qquad \qquad 0 \\ \qquad \qquad | \\ \qquad \qquad 1 \\ \qquad \qquad | \\ \mathbf{w} = 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \end{array} \\
E_7 : & \begin{array}{c} \qquad \qquad 2 \\ \qquad \qquad | \\ \mathbf{v} = 1 \text{---} 2 \text{---} 3 \text{---} 4 \text{---} 3 \text{---} 2 \text{---} 0, \end{array} & \begin{array}{c} \qquad \qquad 0 \\ \qquad \qquad | \\ \mathbf{w} = 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 1 \text{---} 0 \end{array} \\
E_8 : & \begin{array}{c} \qquad \qquad 3 \\ \qquad \qquad | \\ \mathbf{v} = 0 \text{---} 2 \text{---} 3 \text{---} 4 \text{---} 5 \text{---} 6 \text{---} 4 \text{---} 2, \end{array} & \begin{array}{c} \qquad \qquad 0 \\ \qquad \qquad | \\ \mathbf{w} = 0 \text{---} 1 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \end{array}
\end{array}$$

上のベクトルは次のルールに従って決められている: $\mathbf{v}$ は、highest root vector の係数で、0 成分は 0。 $\mathbf{w}$ は、highest root の -1 倍に対応する頂点とつながっている頂点の成分が 1 で、その他の成分は 0。このとき、 X の次元は 4 次元である。逆に $\mathfrak{M}$ のうち 4 次元 (i.e., 0 でない最少の次元) になるものは、本質的に上で与えられるものに限られる。

Kronheimer は次の美しい定理を証明した。

定理 2.15 [Kr]. 次元ベクトルを上のように与えておく。

(1) パラメーターの動く空間 $(\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{R}^n$ を $(\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{h}$ と同一視する。($\mathfrak{h}$ は実 Cartan subalgebra。) 任意の root α に対して、 $\mathbb{R} \oplus \mathbb{C} \ni \alpha(\zeta) \neq 0$ が成り立つ (このとき ζ は generic という) ことが、対応する空間 $\mathfrak{M}_\zeta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が smooth であることと同値である。

(2) パラメーター ζ が 0 のとき、 $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ は単純特異点 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ になる。但し、 Γ は Dynkin diagram に対応する $SU(2)$ の有限部分群である。

(3) 実パラメーター $\zeta_{\mathbb{R}}$ を 0 にして、複素パラメーター $\zeta_{\mathbb{C}}$ だけ動かすと、

$$\bigcup_{\zeta_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}^n} \mathfrak{M}_{(0, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

は、 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の semi-universal deformation を Weyl 群 cover に持ち上げたものになっている。

(4) 実パラメーター $\zeta_{\mathbb{R}}$ を generic にとっておくと、下の図式

$$(2.16) \quad \begin{array}{ccc} \bigcup_{\zeta_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}^n} \mathfrak{M}_{(\zeta_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \xrightarrow{\pi} & \bigcup_{\zeta_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}^n} \mathfrak{M}_{(0, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ \downarrow & \xrightarrow{\cong} & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & & \mathbb{C}^n \end{array}$$

は同時特異点解消になっている。

この定理と同様に一般の次元ベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ についても可換図式 (2.16) が存在して、 $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ の deformation(semi-universal かどうかは分からない) の同時特異点解消になる。

[KN] では、次の定理を示した。

定理 2.17 [KN]. $\mathfrak{M}$ は X 上のある vector bundle の上の反自己双対接続のモジュライ空間と同相になる。

r

1) symplectic manifold X に Lie group G が symplectic form ω を保って作用しているときに、写像 $\mu: X \rightarrow \mathfrak{g}^*$ が moment map (運動量写像) であるとは次の条件を満たすときをいう。

- (1) μ は G -equivariant である。
- (2) 任意の $\xi \in \mathfrak{g}$ と接ベクトル $v \in TX$ に対して次が成り立つ。

$$\langle \xi, d\mu(v) \rangle = \omega(\xi^*, v)$$

ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその双対空間 $\mathfrak{g}^*$ の自然な pairing を表し、 ξ^* は ξ の生成するベクトル場を表す。

2) 複素多様体 X に hermite 計量 g が与えられたとき

$$\omega(v, w) = g(Iv, w) \quad v, w \in TX$$

によって 2-form ω が定義される。ここで $I: TX \rightarrow TX$ は、概複素構造である。定義から ω は非退化であるが、さらに $d\omega = 0$ であるとき、 g は Kähler 計量であるといい、 ω を Kähler form という。

3) M に別の概複素構造 J を

$$J(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} (y^\dagger, -x^\dagger) \quad x \in N, y \in N^*$$

($(\cdot)^\dagger$ は hermitian adjoint のこと。)

で定めて、元々の概複素構造 I と合わせて M を quaternion module と思った方がより自然になる。 G の作用は $I, J, K = IJ$ を保つ。すなわち quaternion linear である。このとき M は、 I, J, K それぞれに対応して Kähler form $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ を持つ。上で与えた symplectic form は $\omega_{\mathbb{C}} = \omega_J + i\omega_K$ になる。(2.4) で定義される $\mathfrak{M}$ は、[HKLR] の意味で hyper-Kähler quotient である。

4) ADHM は Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Mannin による S^4 上の反自己相対接続の分類から取った。但し、彼らの場合には quiver はあらわれない。

5) リーマン多様体 (X, g) 上に 3 つの概複素構造 I, J, K が定義されて、

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$$

という quaternion の関係式を満たし、Levi-Civita connection に関して平行 (i.e., $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$) のとき、hyper-Kähler 多様体という。

6) $\mu: X \rightarrow \mathfrak{g}^*$ を symplectic manifold への G -作用に関する moment map とする。 G の coadjoint action で不変な元 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して、 $\mu^{-1}(\xi)$ は G で invariant な subset であるが、その作用が “良い” (e.g., 商空間が Hausdorff である、slice がとれるなどなど) とすると、

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\xi) & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow \pi & & \\ \mu^{-1}(\xi)/G & & \end{array}$$

という図式において、商空間 $\mu^{-1}(\xi)/G$ 上の symplectic form $\tilde{\omega}$ で $\pi^*\tilde{\omega} = i^*\omega$ を満たすものが唯一存在することが知られている。これを symplectic quotient あるいは Marsden-Weinstein quotient という。

7) affine algebraic variety $X \subset \mathbb{C}^N$ に reductive group $G^{\mathbb{C}} \subset GL(N; \mathbb{C})$ が線型に作用しているとき、 X に同値関係 $\sim$ を

$$x_1 \sim x_2 \iff \overline{G^{\mathbb{C}}x_1} \cap \overline{G^{\mathbb{C}}x_2} \neq \emptyset$$

によって定義し、商空間 $X/\sim$ を $X//G^{\mathbb{C}}$ で表す。このとき、Mumford の geometric invariant theory によって $X//G^{\mathbb{C}}$ は affine algebraic variety になることが知られている。また、 $X//G^{\mathbb{C}}$ 上の正則関数の環は、 X 上の正則関数で $G^{\mathbb{C}}$ -不変なもの全体に等しい。

§ 3. $\mathfrak{M}$ の stratification

この節でも、 $V_0 = W_0 = 0$ を仮定する。

定理 2.7 では、パラメーター $\zeta \in (\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{R}^n$ が generic であると仮定した。この仮定を外した場合には、 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{\text{reg}}$ は成立しないが、二つの集合の差は良く分かる。

簡単のためにパラメーター ζ が 0 のときを考える。 $v'_k \leq v_k$ ($1 \leq k \leq n$) を満たすようなベクトル $\mathbf{v}'$ が与えられたとき、 V_k の v'_k 次元の部分空間 V'_k を考えて、 $V_k = V'_k \oplus V_k'^{\perp}$ と直交分解する。自然な写像

$$\mathfrak{M}_0^{\text{reg}}(\mathbf{v}', \mathbf{w}) \longrightarrow \mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

が、 $V_k'^{\perp}$ 成分では 0 とすることによって定義される。

定理 3.1. パラメーター ζ が 0 のとき、上の写像は単射であって、次のように $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ の stratification を与える。

$$\bigcup_{\mathbf{v}} \mathfrak{M}_0^{\text{reg}}(\mathbf{v}', \mathbf{w}) = \mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

が成り立つ。但し、 $\mathfrak{M}_0^{\text{reg}}(\mathbf{v}', \mathbf{w}) = \emptyset$ ということもあり得る。

例 3.2. 例 2.9, 2.11, 2.13 と同様に A_1 型のときで、 $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = v_1$, $\dim_{\mathbb{C}} W_1 = w_1$ の場合を考えてみよう。例 2.13 より

$$\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) // G_{\mathbf{v}}^{\mathbb{C}} \ni (i_1, j_1) \mapsto A = j_1 i_1 \in \{A \in \text{End}(W_1) \mid \text{rank } A \leq \dim V_1, A^2 = 0\}$$

が同型を与える。このとき

$$\{A \in \text{End}(W_1) \mid \text{rank } A \leq \dim V_1, A^2 = 0\} = \bigcup_{k \leq \dim V_1} \{A \in \text{End}(W_1) \mid \text{rank } A = k, A^2 = 0\}$$

が定理 3.1 の stratification であることが分かる。(上の k は、実際には $0 \leq k \leq \dim W_1/2$ を走る。)

パラメーター ζ がより一般のときにも記述はより複雑になるが、同様の stratification が存在する。

定理 3.2. 定理 2.12 の上で定義された特異点解消写像 $\pi: \mathfrak{M}_{(\zeta_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow \mathfrak{M}_{(0, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ は、($\zeta_{\mathbb{C}} = 0$ のときしか述べなかったが一般の場合に同様に定義される) 上の stratification に関して semi-small である。すなわち $2 \dim \pi^{-1}(x) \leq (x \text{ を含む stratum の codimension})$ が成り立つ。

上の例からも期待される様に実は次が成立する。

定理 3.3. 定理 2.12 の特異点解消で特に $\zeta_{\mathbb{C}} = 0$ のときを考える。このとき $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ は 0 を頂点とする錐であるが、 $\pi^{-1}(0)$ は、 $\mathfrak{M}_{(\zeta_{\mathbb{R}}, 0)}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ の Lagrangian subvariety であり、 $\mathfrak{M}_{(\zeta_{\mathbb{R}}, 0)}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 自身と homotopy 同値である。特に、 $\pi^{-1}(0)$ の既約成分は $H_{\text{middle}}(\mathfrak{M}_{(\zeta_{\mathbb{R}}, 0)}(\mathbf{v}, \mathbf{w}); \mathbb{Z})$ の基底を与える。

$\pi^{-1}(0)$ は大変大切な variety なので $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ という記号で表わすことにしておこう。

上の定理で原点の逆像の様子は分かった。他の点の逆像の様子は、次のように他の次元ベクトル

$\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_s$ に対応する $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_s)$ の様子で記述される。

定理 3.4. $x \in \mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ が stratum $\mathfrak{M}_0^{\text{reg}}(\mathbf{v}', \mathbf{w})$ に入っているとする。このとき $\mathbf{v}_s = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$, $\mathbf{w}_s = \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{v}'$ によって $\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_s$ を定めて上と同様に写像

$$\pi_s: \mathfrak{M}_{(\zeta_{\mathbb{R}}, 0)}(\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_s) \rightarrow \mathfrak{M}_0(\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_s)$$

を考える。このとき

$$H^*(\pi^{-1}(x); \mathbb{Z}) \cong H^*(\mathfrak{L}(\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_s); \mathbb{Z})$$

が成り立つ。¹⁾

r

1) 実際には $\pi^{-1}(x)$ と $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_s)$ は複素解析空間として同型になると予想される。

§ 4. reflection functor と Weyl 群の表現

この節では、§1 の後半に述べた Weyl 群の表現の構成の類似を与える。そこでは、reflection functor と呼ばれる operation が本質的な役割をする。reflection functor は、はじめは [BGP] において Dynkin 図式上の片側向きの矢印しかない quiver の表現の場合に導入された。(Gabriel の定理の証明に非常にうまく使われている。) ここで与えるものは、それを我々の状況に合うように modify したものである。なおこの節の結果は、 $V_0 = W_0 = 0$ を仮定しなくても成り立つが、簡単のため、この場合のみ書く。

$(B, i, j) = (B_{k,l}, i_k, j_k)$ を今までの様な線型写像の族で real ADHM 方程式 $\mu_{\mathbb{R}}(B, i, j) = i\zeta_{\mathbb{R}}$ と complex ADHM 方程式 $\mu_{\mathbb{C}}(B, i, j) = -\zeta_{\mathbb{C}}$ を満たすとする。さらにパラメーター ζ は generic と仮定する。頂点 k を fix し、 k における reflection $\Phi_k: \mathfrak{M}_{\zeta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow \mathfrak{M}_{\zeta'}(\mathbf{v}', \mathbf{w})$ を定義する。ここでパラメーターと次元は

$$\zeta'_l = \begin{cases} -\zeta_k & \text{if } l = k; \\ \zeta_l + \zeta_k & \text{if } a_{kl} = 1; \\ \zeta_l & \text{if } a_{kl} = 0 \end{cases} \quad v'_l = \begin{cases} v_l & \text{if } l \neq k; \\ w_k + \sum_{k \rightarrow m \in \Omega \cup \bar{\Omega}} v_m - v_k & \text{if } l = k \end{cases}$$

と変化する。 ζ の変換式は、simple reflection の Cartan subalgebra への作用の定義に他ならない。 $\mathbf{v}$ の方は、 $\mathbf{w} - \mathbf{C}\mathbf{v}$ の変換が simple reflection の式を与える。(但し、 $\mathbf{C}$ は Cartan 行列) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を

$$\begin{cases} \alpha\beta = \zeta_{\mathbb{C}}^{(k)} \\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = \zeta_{\mathbb{R}}^{(k)} \end{cases}$$

の解とする。(一つ取ってきて fix する。)そこで、

$$F: V_k \oplus \left(\bigoplus_{l \rightarrow k \in \Omega \cup \bar{\Omega}} V_l \right) \oplus W_k \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes V_k; \quad F \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} \bar{\beta} \cdot 1_{V_k} & B_{l,k}^\dagger & j_k^\dagger \\ \alpha \cdot 1_{V_k} & \varepsilon(k,l)B_{k,l} & i_k \end{pmatrix}$$

とおく。\$F\$ は、surjective になる。そこで、

$$V'_k \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Ker } F \cong \text{Ker} \begin{pmatrix} \alpha \cdot 1_{V_k} & \varepsilon(k,l)B_{k,l} & i_k \end{pmatrix} / \text{Im} \begin{pmatrix} \beta \cdot 1_{V_k} \\ B_{l,k} \\ j_k \end{pmatrix}$$

と定義する。後の方は、計量を用いない定義である。\$V'_k\$ への直交射影を \$p\$ であらわす。そこで、\$V_k\$ の代わりに \$V'_k\$ を使って新しい ADHM data を

$$B'_{kl} = p \begin{pmatrix} B_{kl} \\ -\varepsilon(k,l)\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i'_k = p \begin{pmatrix} i_k \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} \\ B'_{lk} = (B_{lk} \quad -\beta \quad 0), \quad j'_k = (j_k \quad 0 \quad -\beta)$$

\$V'_k\$ に subspace としての計量を入れておく。このとき、計算によって \$(B', i', j')\$ が新しいパラメーター \$\zeta'\$ に関して ADHM 方程式を満たすことが示せる。そこで、

$$\Phi_k: \mathfrak{M}_\zeta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \ni (B, i, j) \text{ をとる } G_{\mathbf{v}}\text{-orbit} \rightarrow (B', i', j') \text{ をとる } G_{\mathbf{v}'}\text{-orbit} \in \mathfrak{M}_{\zeta'}(\mathbf{v}', \mathbf{w})$$

が定義される。あとは、

$$\Phi_k^2 = 1, \quad \Phi_k \Phi_l = \Phi_l \Phi_k \text{ if } k \rightarrow l \notin \Omega \cup \bar{\Omega}, \quad \Phi_k \Phi_l \Phi_k = \Phi_l \Phi_k \Phi_l \text{ if } k \rightarrow l \in \Omega \cup \bar{\Omega}$$

を確かめれば、Weyl 群の作用が定義される。特に \$\mathbf{w} - \mathbf{C}\mathbf{v} = 0\$ のときは、\$\mathbf{v}\$ と新しい \$\mathbf{v}'\$ は同じになる。よってこのとき、

$$\bigcup_{\zeta} \mathfrak{M}_\zeta(\mathbf{v}, \mathbf{w})/W \longrightarrow ((\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{R}^n)^\circ/W$$

という fibration が構成される。但し、\$((\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{R}^n)^\circ\$ は generic なパラメーターの全体である。特に、パラメーターの real の成分が 0 であるところ \$\zeta_{\mathbb{R}} = 0\$ に制限して、§1 と同様に、monodromy 表現が定義される。

予想. このようにして、Weyl 群の既約表現は全て構成される ??

§ 5. 単純 Lie 環の既約表現の構成

与えられた Dynkin 図式に対応する単純 Lie 環の universal enveloping algebra を U とする。すなわち E_k, F_k, H_k ($1 \leq k \leq n$) で生成される $\mathbb{Q}$ 上の algebra であって、関係式

$$\begin{aligned} H_k H_l &= H_l H_k, \\ H_k E_l - E_l H_k &= c_{kl} E_l, \quad H_k F_l - F_l H_k = -c_{kl} F_l, \\ E_k F_l - F_l E_k &= \delta_{kl} H_k, \\ \begin{cases} E_k^2 E_l - 2E_k E_l E_k + E_l E_k^2 = 0, & \text{if } c_{kl} = -1, \\ E_k E_l - E_l E_k = 0 & \text{if } c_{kl} = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} F_k^2 F_l - 2F_k F_l F_k + F_l F_k^2 = 0, & \text{if } c_{kl} = -1, \\ F_k F_l - F_l F_k = 0, & \text{if } c_{kl} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、 (c_{kl}) は Cartan matrix である。 U^- を F_k ($1 \leq k \leq n$) たちで生成される subalgebra とする。

この節では、 U の既約表現 (従って Lie 環の表現) を幾何学的に構成する。最後に quantized version を作るためにはどのように modify したらよいかを述べる。

まず Lusztig による universal enveloping algebra の negative part U^- の構成を復習する。

$$\Lambda_{\mathbf{v}} \stackrel{\text{def.}}{=} \{B \in \mathbf{M}(\mathbf{v}, 0) \mid \mu_{\mathbb{C}}(B) = 0\}$$

とおく。($\mathbf{w} = 0$ のときは $i = 0, j = 0$ と思っている。)

補題 5.1. $\mathbf{M}(\mathbf{v}, 0) = T^* \mathbf{N}(\mathbf{v}, 0)$ と思って、射影 $p: \mathbf{M}(\mathbf{v}, 0) \rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{v}, 0)$ を定義すると、 $\mu_{\mathbb{C}}(B) = 0$ は、 B が $p(B)$ の $G_{\mathbf{v}}^{\mathbb{C}}$ -orbit の conormal bundle¹⁾ に入っていることと同値である。

Gabriel の定理 [Ga] から $\mathbf{N}(\mathbf{v}, 0)$ の $G_{\mathbf{v}}^{\mathbb{C}}$ -orbit は有限個である。よって

系 5.2. $\Lambda_{\mathbf{v}}$ の既約成分は、 $\mathbf{N}(\mathbf{v}, 0)$ の $G_{\mathbf{v}}^{\mathbb{C}}$ -orbit の conormal bundle の閉包で与えられる。

$\Lambda_{\mathbf{v}}$ の既約成分の成す集合を $\text{Irr } \Lambda_{\mathbf{v}}$ と書く。

$\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}''$ を次元ベクトルとし、 $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$ を満たすとする。このとき次の図式を考える。

$$(5.3) \quad \Lambda_{\mathbf{v}'} \times \Lambda_{\mathbf{v}''} \xleftarrow{p_1} \mathbf{F}' \xrightarrow{p_2} \mathbf{F}'' \xrightarrow{p_3} \Lambda_{\mathbf{v}}$$

ここで、

$$\mathbf{F}'' \stackrel{\text{def.}}{=} \{(B, (C_k)_k) \mid B \in \Lambda_{\mathbf{v}}, C_k \text{ は } V_k \text{ の } v_k'' \text{ 次元部分空間で } B_{k,l}(C_l) \subset C_k \text{ を満たす.}\}$$

$$\mathbf{F}' \stackrel{\text{def.}}{=} \{(B, (C_k)_k, (R'_k)_k, (R''_k)_k) \mid (B, (C_k)_k) \in \mathbf{F}'', R'_k: V'_k \xrightarrow{\cong} V_k/C_k, R''_k: V''_k \xrightarrow{\cong} C_k\}$$

であり、 p_2, p_3 は自然な射影、 p_1 は $B_{k,l}$ が $(C_k)_k, (V_k/C_k)_k$ に導く線型写像の族を R'_k, R''_k で引き戻したものである。

$\widetilde{M}(\mathbf{v})$ を $\Lambda_{\mathbf{v}}$ 上の constructive²⁾ な関数で $G_{\mathbb{V}}^{\mathbb{C}}$ -不変なもの全体の成す $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間とする。 $f' \in \widetilde{M}(\mathbf{v}'), f'' \in \widetilde{M}(\mathbf{v}'')$ に対して、 $\Lambda_{\mathbf{v}'} \times \Lambda_{\mathbf{v}''}$ 上の constructible な関数 f_1 を

$$f_1(x', x'') \stackrel{\text{def.}}{=} f'(x')f''(x'')$$

によって定め、さらに $p_1^* f_1 = p_2^* f_3$ となるように $\mathbf{F}''$ 上の constructible な関数 f_3 を決める。このとき

$$(f' * f'')(x) \stackrel{\text{def.}}{=} (p_3)_*(f_3)(x) = \sum_{a \in \mathbb{Q}} a \chi(p_3^{-1}(x) \cap f_3^{-1}(a))$$

によって $\widetilde{M}(\mathbf{v})$ の元を定義する。但し χ は Euler 標数である。この $*$ によって $\widetilde{M} = \bigoplus_{\mathbf{v}} \widetilde{M}(\mathbf{v})$ 上に積構造を定義する。 $\mathbf{v} = 0$ のとき $\Lambda_{\mathbf{v}} = \{0\}$ 上で定数 1 をとる関数が単位元である。ある一つの頂点 k 上だけに $\mathbb{C}$ があって、その他の頂点の上には 0 が乗っているような $\mathbf{v}$ を考え、対応する $\Lambda_{\mathbf{v}}$ (一点からなる。) 上で定数 1 を取る関数を $F_k^{(1)}$ とする。 $F_k^{(1)}$ ($1 \leq k \leq n$) で生成される $\widetilde{M}$ の subalgebra を $\widetilde{M}_0$ とおく。

定理 5.4 [Lu]. algebra の同型写像 $\gamma: \mathbf{U}^- \rightarrow \widetilde{M}_0$ で $F_k^{(1)}$ が F_k に写されるものが唯一つ存在する。

$\widetilde{M}_0 \cap \widetilde{M}(\mathbf{v}) = \widetilde{M}_0(\mathbf{v})$ と書く。既約成分 $Y \in \text{Irr } \Lambda_{\mathbf{v}}$ に対して、 $T_Y: \widetilde{M}_0(\mathbf{v}) \rightarrow \mathbb{Q}$ を Y の open dense subset 上でとる値 (定数) として定める。このようにして

$$\Phi: \widetilde{M}_0(\mathbf{v}) \rightarrow \mathbb{Q}^{\text{Irr } \Lambda_{\mathbf{v}}}$$

が定まる。

補題 5.5 [Lu2]. Φ は $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間の間の同型写像を与える。特に $\widetilde{M}_0 = \mathbf{U}^-$ の基底を定める。

系 5.2 と定理 5.4 を反省してみよう。 $\text{Irr } \Lambda_{\mathbf{v}}$ は $\mathbf{v}$ を positive root の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 係数一次結合に書き表すやり方の全体に等しい。一方 $\widetilde{M}_0(\mathbf{v})$ は Poincaré-Birkhoff-Witt 型の基底

$$F_{\alpha_1}^{m_1} F_{\alpha_2}^{m_2} \cdots F_{\alpha_{\nu}}^{m_{\nu}} \quad m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \Delta^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}\}$$

を持ち、次元は $\#\text{Irr } \Lambda_{\mathbf{v}}$ に等しい。ここで F_{α_k} は positive root α_k に対応する root vector である。しかし、補題 5.5 で与えられる基底は Poincaré-Birkhoff-Witt 型の基底ではない。

さて次に U^- の表現を作る。 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t$ を次元ベクトルとする。 U の highest weight が $\mathbf{w}$ となるような (有限次元) 既約表現を $V_{\mathbf{w}}$ とする。すなわち、highest weight vector $x \in V_{\mathbf{w}}$ が存在して

$$(1) \quad E_k x = 0, \quad H_k x = w_k x \quad (1 \leq k \leq n),$$

(2) $\pi: U^- \rightarrow V_{\mathbf{w}}; \alpha \mapsto \alpha x$ は全射で、その kernel は $F_k^{w_k+1}$ ($1 \leq k \leq n$) で生成される U^- の left ideal である。

§2 で、各 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ に対して $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(-\zeta_{\mathbb{C}}) \subset M(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ の open subset $\mathcal{U}$ を定義したことを思い出そう。今は $\zeta_{\mathbb{C}} = 0$ の場合を考える。real パラメーターについて $\zeta_{\mathbb{R}}^{(k)} > 0$ を仮定する。このとき

補題 5.6. 上の仮定の下で

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{(\zeta_{\mathbb{R}}, 0)}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \supset \pi^{-1}(0) &= \{(B, i, j) \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(-i\zeta_{\mathbb{R}}) \mid i = 0\} / G_{\mathbf{v}} \\ &= \{(B, i, j) \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \mathcal{U} \mid i = 0\} / G_{\mathbf{v}}^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

が成立する。

そこで

$$\widetilde{M}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{f \in \widetilde{M}_0(\mathbf{v}) \mid f(B) = 0 \quad \forall (B, 0, j) \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \mathcal{U}\}$$

とおく。(($B, 0, j$) と i -成分が 0 であることに注意!)

定理 5.7. 次元ベクトル $\mathbf{w}$ を固定する。 $\bigoplus_{\mathbf{v}} \widetilde{M}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ は、定理 5.4 の同型写像 γ によって $F_k^{w_k+1}$ ($1 \leq k \leq n$) で生成される U^- の left ideal に写される。よって、次の同型写像を得る。

$$\widetilde{M}_0 / \bigoplus_{\mathbf{v}} \widetilde{M}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \xrightarrow{\cong} V_{\mathbf{w}}$$

(証明のスケッチ)

step 1. $\widetilde{M}_1$ が left ideal である。

図式 5.3 において $\mathbf{v}, \mathbf{v}''$ のそれぞれに対応する $\mathcal{U}$ がどのように関係するかを調べる。 $\mathcal{U}$ をゲージ理論的に解釈し直すことがおこなわれ、[KN] が本質的に使われる。

step 2. $\widetilde{M}_1$ は、 $F_k^{w_k+1}$ ($1 \leq k \leq n$) を含む。

次元ベクトルとして $v_k = w_k + 1$ で他の成分は 0 であるものをとると、 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ の次元公式より $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \emptyset$ であり、従って $\mathcal{U} = \emptyset$ である。これから主張は明らか。

step 3. $V_{\mathbf{w}}$ の lowest weight vector に対応するような元は、 $\widetilde{M}_1$ に属さない。

単位元 1 は $\widetilde{M}_1$ に属さないことは明らか。§4 の reflection functor を用いて、lowest weight vector に対応する関数を構成する。

さて、

$$\Lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{(B, i, j) \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \mid i = 0\} = \Lambda_{\mathbf{v}} \times \left(\bigoplus_k \text{Hom}(V_k, W_k) \right)$$

とおく。 $\Lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ の既約成分は、 $\Lambda_{\mathbf{v}}$ の既約成分と一対一に対応する。既約成分のうち $\mathcal{U}$ と交わるものの全体を $\text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ と置く。定理 2.7 で述べたように $\mathcal{U}$ の補集合は subvariety であった。よって

$$\mathcal{U} \cap \Lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \bigcup_{Y \in \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})} \mathcal{U} \cap Y$$

は既約分解を与える。また、射影 $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/G^{\mathbb{C}}$ が principal bundle であるから、

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \stackrel{(5.6)}{=} \mathcal{U} \cap \Lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w})/G^{\mathbb{C}} = \bigcup_{Y \in \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})} (\mathcal{U} \cap Y)/G^{\mathbb{C}}$$

は既約分解を与える。よって、 $\text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ という記号も自然である。よって次を得る。

定理 5.8. 写像 Φ は、

$$\widetilde{M}_0 / \bigoplus_{\mathbf{v}} \widetilde{M}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\mathbf{v}} \mathbb{Q}^{\text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})} \cong \bigoplus_{\mathbf{v}} H^{\text{middle}}(\mathfrak{M}_{\zeta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}); \mathbb{Q})$$

を導く。よって表現空間 $V_{\mathbf{w}}$ の基底³⁾を与える。また、 $H^{\text{middle}}(\mathfrak{M}_{\zeta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}); \mathbb{Q})$ は、weight が $\mathbf{w} - \mathbf{C}\mathbf{v}$ の weight space に対応する。

quantized version は、 $\Lambda_{\mathbf{v}}$ 上の constructible function の代りに、 $\mathbf{N}(\mathbf{v}, 0)$ 上の $G_{\mathbf{v}}^{\mathbb{C}}$ -不変な constructible sheaf の bounded complex の derived category を用いる。パラメーター q をかけることは、degree の shift に対応する。こうして、quantized $\mathbf{U}^-$ が得られる。このうち、その micro-support $\times \bigoplus_k \text{Hom}(V_k, W_k)$ が $\mathcal{U}$ の補集合に入っているものは、 $\mathbf{U}^-$ の ideal になっていて、それで割ると表現が作られる。

r

1) S が X の部分多様体のときに、

$$T_S^* X \stackrel{\text{def.}}{=} \{y \in T^* X \mid p(y) \in S, y \text{ は } T^* X \text{ の symplectic form に関して } T_{\pi(y)} S \text{ と直交する。}\}$$

を S の conormal bundle という。

2) variety X 上の関数 f が constructible (構成的) であるとは、 $f^{-1}(a)$ が任意の a に対して constructible であり、有限個の a を除いて空集合であるときを言う。

3) この基底は、quantized version の U^- の canonical bases を $q \rightarrow 1$ としたものに等しいにちがいないのだが、証明はまだないようである。

flag manifold, nilpotent variety とモジュライ空間の対応

巾零多様体	モジュライ空間
$S \cap \mathcal{N}$	$\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
stratification $S = \bigcup S \cap \mathcal{O}_x$	stratification $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \bigcup_{\mathbf{v}'} \mathfrak{M}_0(\mathbf{v}', \mathbf{w})^{\text{reg}}$
同時特異点解消 $\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(S) & \xrightarrow{\psi} & S \\ \downarrow \theta & & \downarrow \chi \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{h}/W \end{array}$	同時特異点解消 $\begin{array}{ccc} \bigcup_{\zeta_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}^n} \mathfrak{M}_{(\zeta_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \xrightarrow{\pi} & \bigcup_{\zeta_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}^n} \mathfrak{M}_{(0, \zeta_{\mathbb{C}})}(\mathbf{v}, \mathbf{w})/W \\ \downarrow \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\cong} & \downarrow \mathbb{C}^n/W \end{array}$
$\psi^{-1}(x)$	$\mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \pi^{-1}(0)$
flag manifold G/B	$\mathbf{N}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
cotangent bundle $T^*(G/B)$	$\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{N}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \oplus \mathbf{N}(\mathbf{v}, \mathbf{w})^*$
Schubert cell	$G_{\mathbf{v}}^{\mathbb{C}}$ -orbit in $\mathbf{N}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

- [BGP] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, and V.A.Ponomarev, Coxeter functors and Gabriel's theorem, Russian Math. Surveys **28** (1973), 17–32.
- [Br] E. Brieskorn, Singular elements of semisimple algebraic groups, Actes Congres Intern. Math., vol. 2, 1970, pp. 279–284.
- [Ga] P. Gabriel, Unzerlegbare darstellungen I, Manu. Math. **6** (1972), 71–103.
- [HKLR] N.J. Hitchin, A. Karhede, U. Lindström, and M. Roček, Hyperkähler metrics and supersymmetry, Comm. Math. Phys. **108** (1987), 535–589.
- [Ki] F.C. Kirwan, Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry, Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, 1985.
- [KP] H. Kraft and C. Procesi, Closures of conjugacy classes of matrices are normal, Invent. Math. **53** (1979), 227–247.
- [Kr] P.B. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, J. of Diff. Geom. **29** (1989), 665–683.
- [KN] P.B. Kronheimer and H.Nakajima, Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons, Math. Ann. **288** (1990), 263–307.
- [Lu] G. Lusztig, Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365–421.
- [Lu2] ———, Affine quivers and canonical bases, preprint.
- [Na] H.Nakajima, Instantons on ALE spaces and canonical bases for representations of quantized enveloping algebras, preprint.
- [Ne] L. Ness, A stratification of the null cone via the moment map, Amer. J. Math. **106** (1984), 1281–1325.
- [Sl] P. Slodowy, Simple singularities and simple algebraic groups, Lecture Notes in Math. **815**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.