箙多様体と
量子アファイン環
(quiver varieties and quantum affine algebras)

中島 啓 (Hiraku Nakajima)

京都大学・大学院理学研究科 (Kyoto University)

2000 年 3 月 28 日

1989 ALE 空間上の反自己双対接続のモジュライ空間の箙 (quiver) による記述 (with Kronheimer)

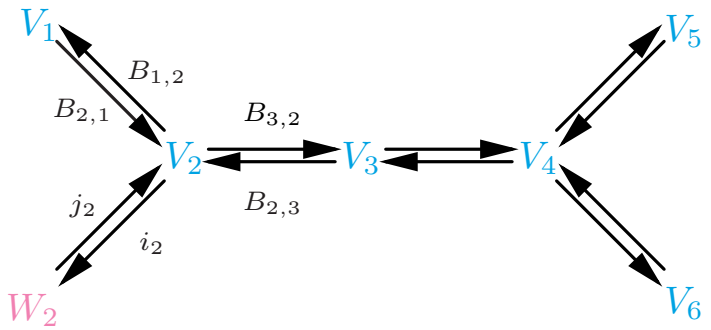
1990 ICM 京都で Lusztig の講演を聞く (Drinfeld-神保の量子展開環 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ の下三角部分環 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の canonical basis を quiver の表現を用いて構成)

1992 ごろ Lusztig の構成と箙多様体 (ALE 空間上の反自己双対接続のモジュライ空間の別名) の関係が分かってきた.

. . .

1999 箙多様体の同変 K 群を用いた量子ループ環 $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現の構成

箙多様体 = ALE 空間上の反自己双対接続のモジュライ空間



$$\begin{cases} B_{2,1}B_{1,2} + B_{2,3}B_{3,2} + i_2 j_2 = -\zeta_{\mathbb{C}}^{(2)}\,\mathrm{id}_{V_2} \\ B_{2,1}B_{2,1}^{\dagger} - B_{1,2}^{\dagger}B_{1,2} + B_{2,3}B_{2,3}^{\dagger} - B_{3,2}^{\dagger}B_{3,2} + i_2 i_2^{\dagger} - j_2^{\dagger} j_2 = -\zeta_{\mathbb{R}}^{(2)}\,\mathrm{id}_{V_2} \\ \cdots\cdots \\ \text{(各頂点につき同様の方程式)} \end{cases}$$

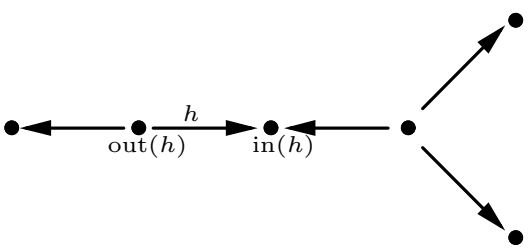
quiver とその path algebra

quiver $\mathcal{Q}$ とは, 次のものである

- I : 頂点の集合, Ω : (向きのついた) 辺の集合
- 辺の始点と終点を対応させる写像

$$\mathrm{out}\colon \Omega \to I, \qquad \mathrm{in}\colon \Omega \to I$$

例



このとき道 (path) とは

- 辺の有限列 $(h_1, h_2, \ldots, h_N)$ で $\mathrm{in}(h_1) = \mathrm{out}(h_2), \ldots, \mathrm{in}(h_{N-1}) = \mathrm{out}(h_N)$ となるもの
- さらに長さ N が 0 の path, すなわちひとつの頂点 $k \in I$ だけからなる constant path も path とする

$\mathbb{F}$ を体とするとき,

- path algebra $\mathbb{F}\mathcal{Q}$: path を基底とするベクトル空間に path の合成によって積を入れたもの

一般には, path algebra は非可換の algebra になる.

また $\mathfrak{I}$ を $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ の両側イデアルとするとき, path algebra を関係式 $\mathfrak{I}$ で割った algebra $\mathbb{F}\mathcal{Q}/\mathfrak{I}$ もよく考える.

quiver の表現 = path algebra $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ の left module と定義する.
すなわち, quiver の表現とは

- 各頂点 $k \in I$ に対し $\mathbb{F}$-ベクトル空間 V_k
- 各辺 $h \in \Omega$ に対し線型写像 $B_h \colon V_{\mathrm{out}(h)} \to V_{\mathrm{in}(h)}$

が与えられているもの.

したがって,

$$\{\text{quiver の表現の同型類 (ただし } \dim V_k \text{ は固定)}\}$$
$$= \bigoplus_{h \in \Omega} \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{out}(h)}, V_{\mathrm{in}(h)}) / \prod_{k \in I} \mathrm{GL}(V_k) =: \mathbf{E}_\Omega(V)/G_V$$

preprojective algebra ≈ cotangent bundle

- $\mathcal{Q}^{\#}$: $\mathcal{Q}=(I,\Omega)$ のダブル. すなわち, I は変えず, Ω の辺 h にその向きを逆にしたもの $\overline{h}$ を付け加えたもの
- $\mathfrak{I}$: $\sum_{\mathrm{in}(h)=k} \pm h\overline{h}=0\ (k\in I)$ で生成される両側イデアル

$$\mathbb{F}\mathcal{Q}^{\#}/\mathfrak{I}\ (\text{preprojective algebra})\ \text{の表現の同型類}$$
$$=\left\{(B_h)\in \mathbf{E}_{\Omega\cup\overline{\Omega}}(V)\ \middle|\ \textstyle\sum_{\mathrm{in}(h)=k}\pm B_hB_{\overline{h}}=0\right\}\Big/G_V$$

注. $\mathbf{E}_{\Omega\cup\overline{\Omega}}(V)$ はシンプレクティックベクトル空間で, $\sum \pm B_hB_{\overline{h}}$ は G_V の作用に関するモーメント写像である. よって上の空間は, 商空間の余接束 $T^*(\mathbf{E}_{\Omega}(V)/G_V)$ と思えるものだが....

次の哲学が成り立つ.

(relation つき)quiver の表現と代数多様体上の (正則) ベクトル束の間には関係がある

実際, preprojective quiver の表現の全体 ≈ ALE 空間上の反自己双対接続のモジュライ空間 $\overset{\text{Hitchin-小林対応}}{\longleftrightarrow}$ ALE 空間上のベクトル束のモジュライ空間となる.

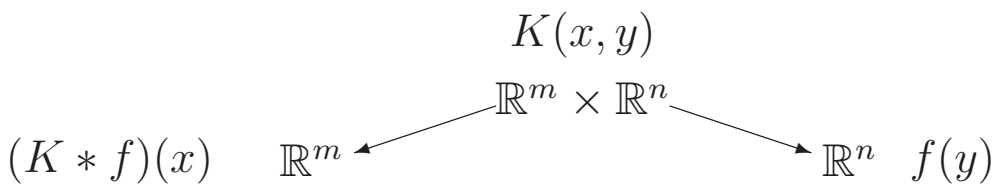
他にも, 射影空間, A_n 型の旗多様体, Hirzebruch 曲面の上の層の導来圏が, ある relation つき quiver の表現の導来圏と同値になる.

表現の全体の構造 (~ ベクトル束のモジュライ空間の構造) を調べるために, 表現の全体を用いてある環を作り (Hecke 環), それを調べる. 次元 (~ Chern 類) を固定しないで同時に扱うことが大切

合成積 (convolution)

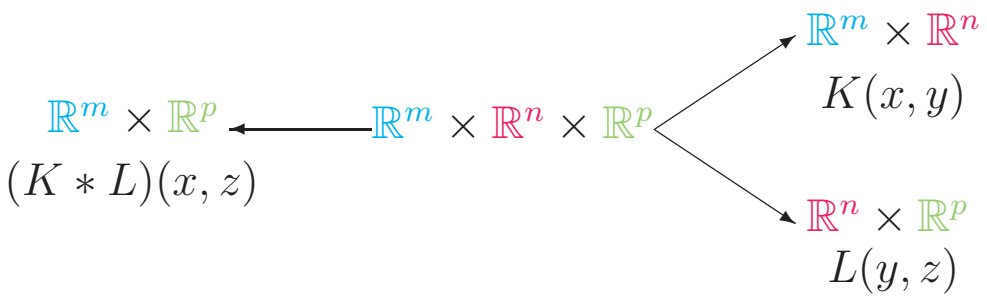
- $K(x,y)$: $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上の関数
- $f(y)$: $\mathbb{R}^n$ 上の関数

$$\Longrightarrow \qquad (K * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy \quad : \mathbb{R}^m \text{ 上の関数}$$



合成積の合成

$$(K * L)(x,z) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) L(y,z) dy$$



$\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ を有限集合 M, N, P で置き換えたもの

$$(K * L)(x, z) = \sum_{y \in N} K(x, y) L(y, z)$$

多様体 M, N, P 上の微分形式の場合

$$K * L = \int_N p_{MN}^* K \wedge p_{NP}^* L$$

コホモロジーの場合

$$K * L = (p_{MP})_* \left(p_{MN}^* K \cup p_{NP}^* L \right)$$

例: K が $M \times N$ の部分多様体 $\mathcal{K}$ の基本類の Poincaré 双対. 写像の一般化という意味で $\mathcal{K}$ は, しばしば対応 (correspondence) と呼ばれる.

合成積で有用な環が構成できる

例 (岩堀-Hecke 環)

- G, B: 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された Chevalley 群とその Borel 部分群, $\mathcal{B} = G/B$: $\mathbb{F}_q$ 上定義された旗多様体
- $\mathcal{H}(G, B)$: $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ 上の G 不変な関数の全体

とする. $\mathcal{H}(G, B)$ は, 合成積により環になる.

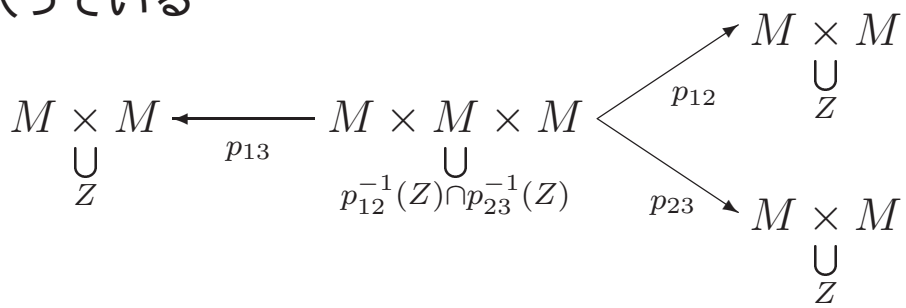
- $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ の G 軌道 $\longleftrightarrow$ $\mathcal{B}$ の B 軌道 $=$ Schubert 胞体

より $\mathcal{H}(G, B)$ は自然な基底を持ち, 生成元と関係式による表示を持つ. この表示は, q を不定元として意味を持ち, $q = 1$ のとき Weyl 群の群環となる.

岩堀-Hecke 環は Weyl 群の q 類似である.

コホモロジー群 $H^*(M \times M, M \times M \setminus Z, \mathbb{R}) = H_*(Z, \mathbb{R})$ の場合 (M はコンパクトとは限らない多様体)

- $Z \subset M \times M$: (一般には特異点を持つ) 閉部分多様体
- $p_{13} : p_{12}^{-1}(Z) \cap p_{23}^{-1}(Z) \to M$ は固有写像であり, 像は Z に入っている



このときに合成積によって環構造を入れることができる:

$$\alpha * \beta = p_{13*}\left(p_{12}^*\alpha \cup p_{23}^*\beta\right)$$

例 ((affine)Weyl 群の lagrangian 構成)

- G : 複素単純 Lie 群, B :その Borel 部分群
- $\mathcal{B} = G/B$: 旗多様体, $M = T^*\mathcal{B}$:その余接束
- $Z \subset M \times M$: Steinberg 多様体. $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ の G 軌道 (前の 12 枚めの例で見たように本質的に Schubert 胞体である) の余法束 (conormal bundle) の和

このとき次が成り立つ.

$$H_{\dim Z}(Z, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}[W] \text{ (Weyl 群 } W \text{ の群環)}$$

$$H_*(Z, \mathbb{R}) \cong \text{affine Weyl 群の群環 } \mathbb{R}[\widehat{W}] \text{ の商}$$

この例は, 前の例 (12 枚め) の microlocalization である (柏原-谷崎)

q 類似

12 枚めの例では, パラメータ q が $\#\mathbb{F}$ として入った. また, '重みの理論' を用いて, q を不定元として導入することも出来る. では, 14 枚めの例ではどうであろうか？

答. ホモロジー群 $H_*(Z,\mathbb{R})$ の代わりに, 同変 K 群 $K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ を考える. $\mathbb{C}^*$ の表現環 $R(\mathbb{C}^*)=\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ の加群となる.

ただし, G の作用は自然なもの. $\mathbb{C}^*$ の作用は $T^*\mathcal{B}$ のファイバーへのスカラー倍 (の -2 乗)

このとき $K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)\cong\widehat{H}_q$ (affine Hecke 環) が成り立つ. (Kazhdan-Lusztig, Ginzburg)

Hecke 環と量子展開環の構成 – まとめ

類似

Weyl 群 W, Hecke 環 H_q	Lie 環 $\mathfrak{g}$, 量子展開環 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$
affine Hecke 環 $\widehat{H}_q$	量子ループ環 $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$
$H_q\cong\mathcal{H}(G,B)$	上三角部分環 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\cong$ quiver の表現の Hall 代数
$\mathbb{R}[W]\cong H_{\dim Z}(Z,\mathbb{R})$	$\mathbf{U}(\mathfrak{g})/I_W\cong H_{\dim Z(W)}(Z(W),\mathbb{R})$
ただし $Z\subset T^*\mathcal{B}\times T^*\mathcal{B}$	ただし $Z(W)\subset$ 箙多様体の積
$\widehat{H}_q\cong K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$	準同型 $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})\to K^{G_W\times\mathbb{C}^*}(Z(W))$

相違
- W が現れる (最高ウェイトに対応)
- 有限個の空間を同時に扱う
- $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ でなく, $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ しか構成できていない

Hall algebra

- $\mathcal{A}$: アーベル圏で, 任意の対象 $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ に対して $\#\,\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A,B) < \infty$ であり, 十分大きな i に対しては 0
- $g^C_{AB} = \#\{A' \subset C\,(\text{部分対象}) \mid A' \cong A, C/A' \cong B\} < \infty$

例えば, $\mathbb{F}_q$-代数 (ただし homological 次元が有限と仮定する) の有限次元表現のアーベル圏を考えればよい.

- $\mathcal{H}(\mathcal{A})$: $\mathcal{A}$ の対象の同型類を基底とする $\mathbb{C}$-ベクトル空間

このとき $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ に

$$[A] * [B] = \sum_{[C]} g^C_{AB}[C]$$

によって積を入れ, Hall algebra と呼ぶ

quiver の Hall algebra と量子展開環

- $\mathcal{Q}$: ADE 型の Dynkin グラフに向き (勝手でよい) を入れたもの, $\mathfrak{g}$: Dynkin グラフに対応する単純 Lie 環
- $\mathbb{F}$: 有限体
- $\mathcal{H}(\mathbb{F}\mathcal{Q})$: $\mathbb{F}\mathcal{Q}$ の表現のアーベル圏の Hall algebra(ただし積を modify したもの)

Ringel は,

$$\mathcal{H}(\mathbb{F}\mathcal{Q}) \cong \mathbf{U}^-_q(\mathfrak{g})^{\mathbb{Z}}\ (\text{下三角部分環 } \mathbf{U}^-_q(\mathfrak{g}) \text{ の } \mathbb{Z}\text{-form})$$

となることを示した. ただし, パラメータ q は $\sqrt{\#\mathbb{F}}$ に特殊化される.

さらに Lusztig は, これを '幾何学的に' 再構成し, 応用として canonical base の存在を証明した.

quiver variety

- $\mathcal{Q} = (I, \Omega)$: quiver, $\mathcal{Q}^{\#}$: そのダブル

各頂点 k ごとに二つのベクトル空間 V_k, W_k を置き,

$$\mathbf{M}(V,W) := \mathbf{E}_{\Omega\cup\overline{\Omega}}(V) \oplus \left(\bigoplus_{k\in I} \operatorname{Hom}(W_k, V_k) \oplus \operatorname{Hom}(V_k, W_k) \right)$$

とおく. $\mu\colon \mathbf{M}(V,W) \to \bigoplus_{k\in I} \operatorname{End}(V_k)$ を G_V の作用に関するモーメント写像とする.

そこで $\mu^{-1}(0)/G_V$ を考えたい. これは preprojective algebra の表現の '枠付き' モジュライ空間であり, $\mathbf{E}_{\Omega}(V) \oplus \bigoplus_{k\in I} \operatorname{Hom}(W_k, V_k)/G_V$ の余接束であるべきものである. しかし .....

代数多様体となる二つの商を考えることが出来る.

- $\mathfrak{M}_0(V,W) = \mu^{-1}(0)/\!\!/G_V = \mu^{-1}(0)$ の閉軌道全体
- $\mathfrak{M}(V,W) = \mu^{-1}(0)^{\mathrm{s}}/G_V = \mu^{-1}(0)$ の安定な軌道全体

$\mathfrak{M}_0(V,W)$ はアファイン代数多様体で, $\mathfrak{M}(V,W)$ は非特異な準射影多様体である. また, 作り方から

$$\pi\colon \mathfrak{M}(V,W) \to \mathfrak{M}_0(V,W)$$

という射影的な写像がある.

例. グラフは A_1 型, すなわち頂点が一個で辺はない

$\mathfrak{M}(V,W) \cong T^*\operatorname{Grass}(V,W) = \{(S,\xi) \mid S \subset W,\ \xi\colon W/S \to S\}$

$\mathfrak{M}_0(V,W) \cong \{\xi \in \operatorname{End} W \mid \xi^2 = 0,\ \operatorname{rank}\xi \le \dim V\}$

量子アファイン環の有限次元表現

- $\mathfrak{g}$: (有限次元) 複素単純 Lie 環
- $\mathbf{L}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$: **ループ** Lie 環
- evaluation 写像 ev_a $(a \neq 0)$ $\mathbf{L}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$; $\quad X \otimes z^k \mapsto a^k X$

> $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現は, $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現を evaluation 写像で引き戻したもののテンソル積で得られる.

問. この結果の q 類似は？ (分類と表現の具体的な構成)

困難. evaluation 写像の q 類似が一般には存在しない.

箙多様体と量子アファイン環

W を固定し, V を動かす.

$$\mathfrak{M}_0(\infty, W) = \operatorname{inj}\lim_V \mathfrak{M}_0(V, W)$$

$$\mathfrak{M}(W) = \bigsqcup \mathfrak{M}(V, W)$$

$$\pi\colon \mathfrak{M}(W) \to \mathfrak{M}_0(\infty, W)$$

Steinberg 多様体の類似:

$$\begin{aligned} Z(W) &= \mathfrak{M}(W) \times_{\mathfrak{M}_0(\infty,W)} \mathfrak{M}(W) \\ &= \{(x^1, x^2) \in \mathfrak{M}(W) \times \mathfrak{M}(W) \mid \pi(x^1) = \pi(x^2)\} \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}_0(\infty, W)$, $\mathfrak{M}(W)$ には, $G_W = \prod_{k \in I} \mathrm{GL}(W_k)$ と $\mathbb{C}^*$ の作用がある. G_W の方は, 自然な作用が誘導する作用であり, $\mathbb{C}^*$ の方は, データを一斉にスカラー倍するという作用である.

定理　次の可換図式がある.

$$\begin{array}{ccc} K^{G_W \times \mathbb{C}^*}(Z(W)) & \longrightarrow & H_{\dim Z(W)}(Z(W), \mathbb{R}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

ただし, $\mathfrak{g}$ は Dynkin グラフに対応した単純 Lie 環であり, $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ はその普遍展開環, そして $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ のある $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-部分環である. また, 上向き矢印は同型ではない.